Lösungen zu Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Koppelnavigation.

a) Ein Schiff bestimmt seine Position bei Sonnenuntergang durch den Stand der Sterne als (-10 km, 20 km), d.h. es befindet sich 20 km nördlich und 10 km westlich von Bremerhaven. Dann fährt es 2 Stunden lang mit einem Kurs direkt nach Norden mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h. Was ist seine Position 2 Stunden nach Sonnenuntergang?
Lösung:
Die Position des Schiffes lässt sich mit

$$\Delta s = v \cdot \Delta t$$

berechnen. Mit $v = 15$ km/h und $\Delta t = 2$ h ergibt sich eine Strecke von 30 km (in Richtung Norden). Die neue Position des Schiffes ist also die alte Position addiert mit der zurückgelegten Strecke (0 km, 30 km), so dass die neue Position (-10 km, 50 km) ist (siehe Positionen "1" und "2" in der Skizze unten).

b) Jetzt ändert der Kapitän den Kurs auf Nordwest und das Schiff fährt weitere 2 Stunden mit einer Geschwindigkeit von 14,1 km/h. Was ist die Position des Schiffes 4 Stunden nach Sonnenuntergang?
Lösung:
Da das Schiff nach Nordwest fährt, müssen die Geschwindigkeitskomponenten des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v} = \binom{v_n}{v_w}$ jeweils den gleichen Wert haben. Da das Betragsquadrat die Gesamtgeschwindigkeit des Schiffes angibt, lassen sich die Beträge der Komponenten des Vektors berechnen

$$\sqrt{v_n^2 + v_w^2} = 14.1 \text{ km/h}$$
$$v_n = v_w = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (14.1 \text{ km/h})^2} \approx 10 \text{ km/h}$$

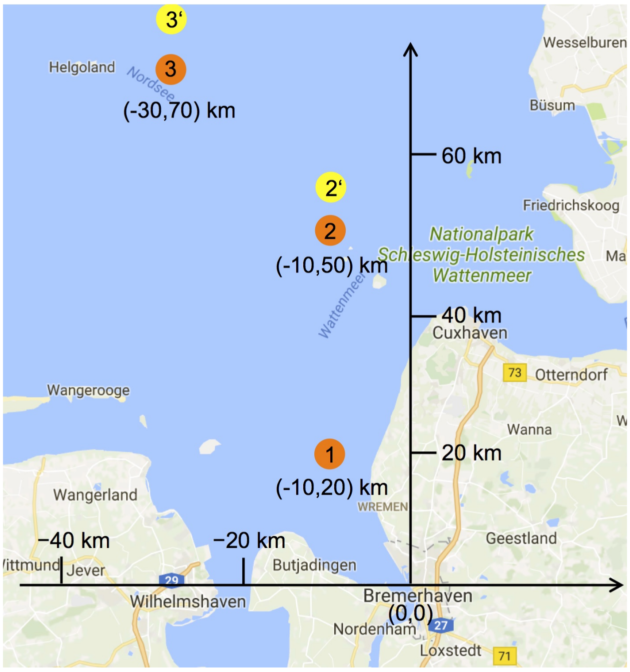
Damit bewegt sich das Schiff zwei Stunden mit 10 km/h nach Norden und nach Westen, das sind jeweils $\Delta s = 10$ km/h $\cdot$ 2 h $= 20$ km. Die neue Position ist somit (-30 km, 70km). Siehe Position "3" in der Skizze unten.

c) Welchen Kurs muss das Schiff einschlagen, um von seiner Position 4 Stunden nach Sonnenuntergang auf direktem Wege nach Helgoland zu fahren? Helgoland befindet sich bei (-40 km, 70 km), d.h. 70 km nördlich und 40 km westlich von Bremerhaven.
Lösung:
Es muss eine Kurs direkt nach Westen einschlagen, denn die nördliche Position ist bereits bei 70km.

d) Wann erreicht das Schiff Helgoland mit dem in der letzten Teilaufgabe errechneten Kurs, wenn es mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h fährt?
Lösung:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{10 \text{ km}}{15 \text{km/h}} = 2/3 \text{ h} = 40 \text{ min}$$

e) Wie ändern sich die Antworten der Teilaufgaben a) und b), wenn während der ganzen Nacht eine Strömung von 2,5 km/h in nördlicher Richtung herscht. Beachte, dass die Geschwindigkeitsmessungen des Schiffes relativ zum Wasser sind!
Lösung:
Der Rechenweg ist der selbe, nur muss für die nördliche Geschwindigkeitskomponente 2,5 km/h dazuaddiert werden. Die westliche bleibt die selbe. Damit ergibt sich bei a) $(-10\text{ km}, 55\text{ km})$ und bei b) $(-30\text{ km}, 80\text{ km})$. Siehe die gelben Positionen “$2'$” und “$3'$” in der Skizze unten.



Aufgabe 2

Statistik mit Mäusen.

a) Was sind die Mittelwerte der Massen von Labor- und Feldmäuse? Welche Art von Maus ist im Mittel schwerer?

Lösung:
Der Mittelwert berechnet sich aus den einzelnen Massenangaben m_i als

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_i$$

Labormäuse: $\mu_L = 20{,}7$ g; Feldmäuse: $\mu_F = 40{,}2$ g.
Da $\mu_F > \mu_L$ sind die Feldmäuse im Mittel schwerer.

b) Berechnen Sie die Standardabweichungen der Massen von Labor- und Feldmäuse, um die Variabilität der Populationen zu charakterisieren.

Lösung:
Die Standardabweichung berechnet sich aus den einzelnen Massenangaben m_i als

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(m_i-\mu)^2}$$

Labormäuse: $\sigma_L = 9{,}7$ g; Feldmäuse: $\sigma_F = 14{,}9$ g;

c) Berechnen Sie die Stichprobenfehler ("standard error of the mean") der Massen von Labor- und Feldmäuse, um abzuschätzen, wie präzise die Mittelwerte der Populationen durch die Daten bestimmt sind.

Lösung:
Der Stichprobenfehler berechnet sich als

$$sem = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

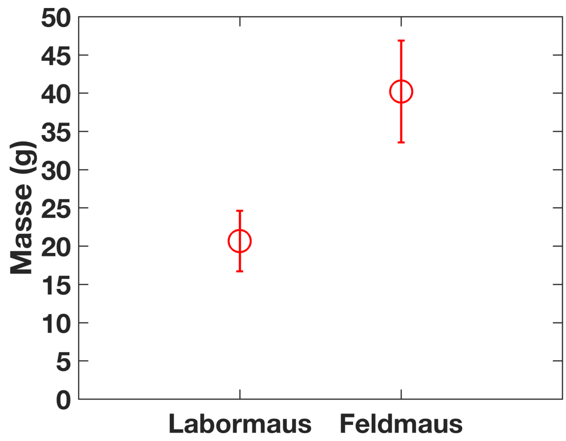
Labormäuse: $sem_L = 4{,}0$ g; Feldmäuse: $sem_F = 6{,}7$ g.

Wie würde sich das Ergebnis ändern, wenn Sie für beide Mäusearten jeweils $N = 100$ Mäuse gemessen hätten (bei gleichen Werten für Mittelwert und Standardabweichung)?

Lösung:
Der Stichprobenfehler wäre dann wesentlich kleiner, durch die $1/\sqrt{N}$ Abhängigkeit. Konkret wäre $sem_L = 1{,}0$ g und $sem_F = 1{,}5$ g;

d) Würden Sie aus den vorliegenden Daten schließen, dass die Mäusepopulationen unterschiedlich schwer sind?

Lösung:
Um diese Frage zu entscheiden, müssen wir den Unterschied zwischen den Mittelwerten mit den Stichprobenfehlern vergleichen. Unten sind die Mittelwerte aufgetragen und die Stichprobenfehler als Fehlerbalken angegeben. Wie man sieht überlappen die Fehlerbalken nicht, was vermuten lässt, dass der Unterschied signifikant ist. (Die genaue Rechnung mit einem t-Test zeigt in der Tat, dass sich die Mittelwerte statistisch signifkant unterscheiden).



Wie würde sich das Ergebnis ändern, wenn Sie für beide Mäusearten jeweils $N = 100$ Mäuse gemessen hätten (bei gleichen Werten für Mittelwert und Standardabweichung)? In diesem Aufgabenteil brauchen Sie keine detaillierte Rechnung, sondern nur eine Abschätzung.

Lösung:
In diesem Fall wären die Stichprobenfehler wesentlich kleiner, graphisch wären also die Fehlerbalken in der Abbildung oben wesentlich kürzer. In diesem Fall wäre der Unterschied sehr signifikant.

Aufgabe 3

Bewegung in einer Dimension.

a) Bei einer Beschleunigung von 10,0 m/s, welche Geschwindigkeit hat der Wagen am Ende der Beschleunigungsphase?

Lösung:
Gleichmässig beschleunigte Bewegung, somit $v = v_0 + at$, wobei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, a die Beschleunigung und t die Zeit darstellen. Demnach hat der Wagen nach 7 s die Geschwindigkeit:

$v = 0 + 10,0\ \mathrm{m/s}^2 \cdot 7\ \mathrm{s} = 70\ \mathrm{m/s} = 252\ \mathrm{km/h}$.

b) Welches Diagramm aus der Abbildung (Diagramme A-F) beschreibt seine Geschwindigkeit am besten?

Lösung:
Diagramm B beschreibt die Geschwindigkeit korrekt. Erklärung siehe Teil c).

c) Was ist die jeweilige physikalische Situation, die in den Diagrammen A-F dargestellt wird?

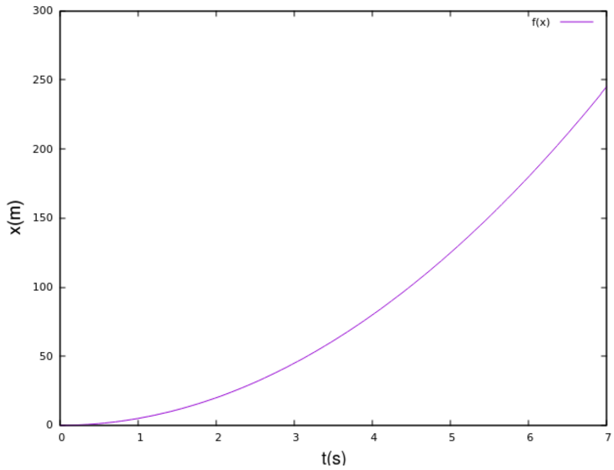
Lösung:
A ist positive beschleunigte Bewegung, mit einer Beschleunigung, die als Funktion der Zeit zunimmt und einer Startgeschwindigkeit größer Null.
B ist gleichmässig beschleunigte Bewegung, mit einer Startgeschwindigkeit gleich Null, d.h. aus der Ruhe.
C ist gleichmässig beschleunigte Bewegung, mit einer Startgeschwindigkeit größer Null.
D ist positive beschleunigte Bewegung, mit einer Beschleunigung, die als Funktion der Zeit zunimmt, und Startgeschwindigkeit gleich Null.
E ist gleichmässig beschleunigte Bewegung, mit einer negative Beschleunigung und Startgeschwindigkeit größer Null.
F ist negativ beschleunigte Bewegung, mit einer negativen Beschleunigung, die als Funktion der Zeit vom Betrag her zunimmt, und Startgeschwindigkeit größer Null.

d) Skizzieren Sie ein Weg-Zeit Diagramm, das den Ort des Rennwagens in diesen 7 s zeigt. Gehen Sie davon aus, dass der Ort x zur Zeit $t = 0$ s gleich Null ist.

Lösung:
Es handelt sich um gleichmässig beschleunigte Bewegung in 1D. Somit verhält sich der Ort wie

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

In der Aufgabe ist gegeben, dass $x_0 = 0$ m; $v_0 = 0$ km/h und $a = 10,0\ \mathrm{m/s}^2$.



f(x)
300
250
200
150
100
50
0
x(m)
0
1
2
3
4
5
6
7
t(s)