Übungsblatt 10
Besprechung am 16.01.2018/18.01.2018

Aufgabe 1

Bluttranfusion: Ein Patient benötigt dringend eine Bluttransfusion. Das Blut soll aus einem Infusionsbeutel über einen Schlauch und durch eine dünne Kanüle (Nadel) fließen, die in die Vene eingeführt ist. Die Kanüle sei 5,00 cm lang und habe einen kreisförmigen Innendurchmesser von 400 µm. Dem Patienten sollen 3,00 cm^3 Blut pro Minute zugeführt werden. Die dynamische Viskosität von Blut beträgt $\eta_B = 3{,}50 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$; die Dichte $\rho_B = 1{,}06 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$. Der Fluss durch die Kanüle kann durch das Gesetz von Hagen-Poiseuille beschrieben werden und die Reibung des Fluides im Schlauch kann vernachlässigt werden.

a) Welche Druckdifferenz muss zwischen Anfang und Ende der Kanüle liegen, um die benötigte Flussrate zu erreichen?

Lösung:

$$\text{Hagen-Poiseuille:} \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8\eta l} \cdot R^4$$

$$\Rightarrow \quad \Delta p = (p_1 - p_2) = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{8\eta l}{\pi R^4} =$$

$$= 3{,}00 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{min}} \cdot 1/60\,\frac{\mathrm{min}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{8 \cdot 3{,}50 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s} \cdot 0{,}05\,\mathrm{m}}{\pi \cdot (0{,}0002\,\mathrm{m})^4} = \underline{\underline{1{,}39 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}}}$$

b) In welcher Höhe h über dem Veneneingang muss der Infusionsbeutel aufgehängt werden, um die benötigte Flussrate zu erreichen? Der Infusionsbeutel ist oben offen und der Blutdruck in der Vene beträgt 2400 Pa über Atmosphärendruck.

Lösung:

Druck am venenseitigen Ende der Kanüle ($\widehat{=}$ Druck in der Vene): $p_2 = p_V + p_A$, hierbei sind p_A der Atmosphärendruck und p_V der Venenüberdruck.
Druck am schlauchseitigen Ende der Kanüle : $p_1 = p_S + p_A = \Delta p + p_2 = \Delta p + p_V + p_A$, mit p_S als dem erforderlichen Schweredruck des Infusionsbeutels. Umformen nach p_S ergibt:

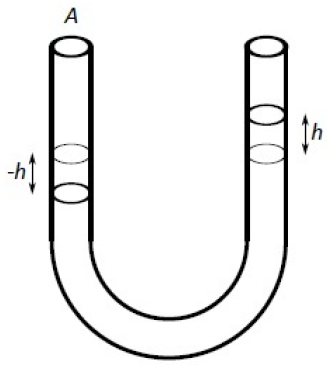
$$\Rightarrow \quad p_S = \Delta p + p_V = 1{,}39 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa} + 2400\,\mathrm{Pa} = \underline{\underline{1{,}63 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}}}$$

Um diesen Druck zu erzeugen, muss der Beutel auf die Höhe h gehängt werden, sodass

$$p_S = \rho_B \cdot g \cdot h \;\Rightarrow\quad h = \frac{p_S}{\rho_B \cdot g} = \frac{1{,}63 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}}{1{,}06 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = \underline{\underline{1{,}57\,\mathrm{m}}}$$

Aufgabe 2

Schwingende Wassersäule im U-Rohr: In einem U-Rohr mit einem Innendurchmesser von $d = 25{,}0\,\mathrm{mm}$ befindet sich Wasser mit der Dichte $\rho_W = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ und einer dynamischen Viskosität $\eta_W = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/(m\,s)}$, welches im rechten Teil des Rohres bis zur Höhe h über dem Ruhepegel steht und im Linken bis zur Höhe $-h$ (siehe Abbildung). Die gesamte Wassersäule hat die Länge $L = 0{,}70\,\mathrm{m}$.



a) Bestimmen Sie zunächst die Masse m_W der schwingenden Wassersäule und die vorhandene Rückstellkonstante k.
Hinweis: Nehmen Sie dazu die Schwingung als Hooke'sche Schwingung an.

Lösung:

$$m_W = \rho_W \cdot V_W = \rho_W \cdot A \cdot L \quad \text{mit } A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad m_W = \frac{\pi}{4} \cdot 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot (25 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^2 \cdot 0{,}7\,\mathrm{m} = \underline{\underline{0{,}34\,\mathrm{kg}}}$$

Rückstellkonstante:

$$\text{Hooke'sches Gesetz:} \quad F = kx \quad \text{mit } x = h$$

$$\text{Rückstellkraft:} \quad \Delta p \cdot A = \rho_W \cdot g \cdot 2h \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad kh = 2\rho_W g h \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad k = 2\rho_W g \frac{\pi d^2}{4} = 2 \cdot 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot \frac{\pi \cdot (25 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{4} = \underline{\underline{9{,}6\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s^2}}}}$$

b) Stellen Sie die allgemeine Bewegungsgleichung mit Dämpfung auf und bestimmen Sie die ungedämpfte und gedämpfte Eigenfrequenz sowie die Abklingkonstante $\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{2m}{\gamma}$

Hinweis: Nach dem Gesetz von Hagen-Poiseuille gilt für die Dämpfung bei der Strömung in einem Rohr $\gamma = 8\pi\eta L$

Lösung:

Die Bewegungsgleichung der gedämpften harmonischen Schwingung lautet:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$$

Für die freie Eigenfrequenz gilt:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f \quad \text{und } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \quad f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}6\,\mathrm{kg/s^2}}{0{,}34\,\mathrm{kg}}} = \underline{\underline{0{,}8457\,\mathrm{Hz}}} \approx 0{,}85\,\mathrm{Hz}$$

Die gedämpfte Eigenfrequenz ergibt sich aus:

$$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \delta^2 = \omega_0 - \frac{\gamma^2}{4m^2}$$

$$\Rightarrow \quad f_d = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 f_0^2 - \frac{(8\pi\eta L)^2}{4m^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2(0{,}8457\,\mathrm{Hz})^2 - \frac{(8\pi \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/(m\,s)} \cdot 0{,}70\,\mathrm{m})^2}{4 \cdot (0{,}34\,\mathrm{kg})^2}} = \underline{\underline{0{,}8457\,\mathrm{Hz}}} \approx 0{,}85\,\mathrm{Hz}$$

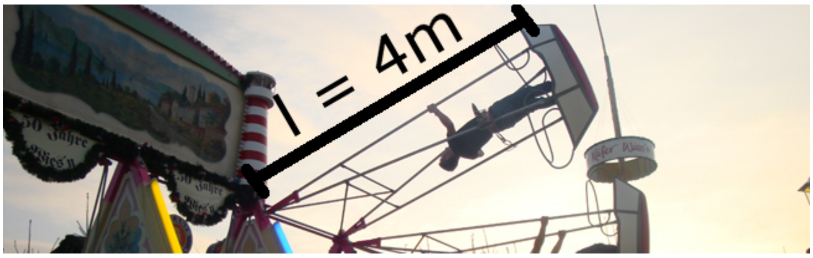
Der Effekt durch die Reibung ist also vernachlässigbar klein.

Abklingkonstante:

$$\tau = \frac{2m}{\gamma} = \frac{m}{4\pi\eta L} = \frac{0{,}34\,\mathrm{kg}}{4\pi \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/(m\,s)} \cdot 0{,}70\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{38{,}65\,\mathrm{s}}} \approx 39\,\mathrm{s}$$

Aufgabe 3

Wiesnschaukel: Auf der Wiesn gibt es kleine Schiffschaukeln ($l = 4{,}0\,\mathrm{m}$), die von bis zu 2 Personen nur durch Gewichtsverlagerung angetrieben werden können (siehe Abbildung). Zunächst schaukelt nur Jan ($m_J = 80{,}0\,\mathrm{kg}$) auf der Schaukel ($m_S = 100\,\mathrm{kg}$. Nehmen sie an, die Schaukel startet aus der Ruhe 1,50 m über dem tiefsten Punkt der Schaukel. Sie können den Effekt der Reibung vernachlässigen.



a) Wie groß ist seine Geschwindigkeit, wenn Jan den tiefsten Punkt erreicht?

Lösung:

Betrachte Energieerhaltung:
Zu Beginn: $E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} = 0 + m \cdot g \cdot h$
Am tiefsten Punkt: $E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + 0$
Mit $E_{ges} = \text{const}$ folgt:

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgh \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{5{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

b) Wie groß ist die Kraft, die auf die Aufhängung wirkt, wenn Jan den tiefsten Punkt erreicht?

Lösung:

$$F = F_G + F_Z = m \cdot g + \frac{m \cdot v^2}{r} = (m_J + m_S) \cdot \left(g + \frac{2gh}{R} \right) =$$
$$= (80{,}0\,\mathrm{kg} + 100\,\mathrm{kg}) \cdot \left(9{,}81\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2} + \frac{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{kg\,m/s^2} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{m}} \right) = \underline{\underline{3{,}1\,\mathrm{kN}}}$$

c) Unter der Annahme, dass Sie das System als ideales (mathematisches) Pendel nähern können, wie lange dauert es, bis Jan vom Zeitpunkt an dem er den tiefsten Punkt erreicht, wieder in seiner Ausgangslage ankommt?

Lösung:

Für ein ideales Pendel gilt: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Vom tiefsten Punkt bis zu Ausgangslage: $\frac{3}{4}T$

$$t = \frac{3}{4} \cdot T = \frac{3}{4} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{4\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{kg\,m/s^2}}} = \underline{\underline{3{,}0\,\mathrm{s}}}$$

d) Wie viel Energie müsste Jan durch Gewichtsverlagerung noch in die Schwingung stecken, damit er den Überschlag gerade eben schafft? Welcher Geschwindigkeit am tiefsten Punkt entspricht das und wie ändert sich nun die Kraft auf die Aufhängung?

Lösung:

Erforderliche Energie: $E_{pot,d)}$ für $h = 8{,}0\,\mathrm{m}$ am höchsten Punkt.

$$\text{zusätzliche Energie:}\quad E = E_{pot,d)} - E_{pot,a)} = m \cdot g \cdot (8\,\mathrm{m} - 1{,}5\,\mathrm{m}) =$$
$$= (80{,}0\,\mathrm{kg} + 100\,\mathrm{kg}) \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s^2}} \cdot 6{,}5\,\mathrm{m} = \underline{\underline{11{,}48\,\mathrm{kJ}}} \approx 11\,\mathrm{kJ}$$

Geschwindigkeit: analog zu a) $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s^2}} \cdot 8{,}0\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{12{,}53\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}} \approx 13\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Kraft auf die Aufhängung: analog zu b)

$$F = (m_J + m_S) \cdot \left(g + \frac{2gh}{R}\right) =$$
$$= (80{,}0\,\mathrm{kg} + 100\,\mathrm{kg}) \cdot \left(9{,}81\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s^2}} + \frac{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{kg\,m/s^2} \cdot 8\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{m}}\right) = \underline{\underline{8{,}8\,\mathrm{kN}}}$$

e) Wie ändern sich die Ergebnisse der ersten vier Teilaufgaben, wenn Jans Freund Martin ($m_M = 80\,\mathrm{kg}$) mit auf der Schaukel steht?

Lösung:

Teilaufgabe a): $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ unabhängig von der Masse. $\Rightarrow$ ändert sich nicht.

Teilaufgabe b): Die Kraft auf die Aufhängung ist proportional zur Masse. Wir können also entweder die Kraft mit der neuen Gesamtmasse erneut ausrechnen oder wir teilen die Kraft aus Teilaufgabe b) durch die alte Gesamtmasse und multiplizieren mit der neuen Gesamtmasse:

$$F_{e)} = F_{b)} \cdot \frac{m_J + m_S + m_M}{m_J + m_S} = 3{,}1\,\mathrm{kN} \cdot \frac{260\,\mathrm{kg}}{180\,\mathrm{kg}} = \underline{\underline{4{,}5\,\mathrm{kN}}}$$

Teilaufgabe c): $t = \frac{3}{4} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ unabhängig von der Masse. $\Rightarrow$ ändert sich nicht.

Teilaufgabe d): Kraft auf die Aufhängung und zusätzlich benötigte Energie für den Überschlag beide proportional zur Masse:

$$F_{e)} = F_{d)} \cdot \frac{m_J + m_S + m_M}{m_J + m_S} = 8{,}8\,\mathrm{kN} \cdot \frac{260\,\mathrm{kg}}{180\,\mathrm{kg}} = \underline{\underline{12{,}71\,\mathrm{kN}}} \approx 13\,\mathrm{kN}$$

$$E_{e)} = E_{d)} \cdot \frac{m_J + m_S + m_M}{m_J + m_S} = 11{,}48\,\mathrm{kJ} \cdot \frac{260\,\mathrm{kg}}{180\,\mathrm{kg}} = \underline{\underline{16{,}58\,\mathrm{kJ}}} \approx 17\,\mathrm{kJ}$$