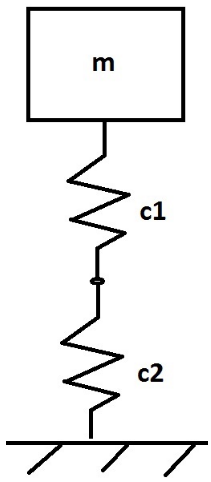
Lösung zu Übungsblatt 12

Aufgabe 1

Federschaltungen bei harmonischen Oszillatoren. Im Folgenden seien zwei verschiedene Oszillatorsysteme mit der Masse m und den Federkonstanten c_1, c_2, c_3 und c_4 gegeben. Sie können davon ausgehen, dass die Bewegung nur entlang der vertikalen Achse erfolgt (d.h. eine eindimensionale Bewegung stattfindet).
Bemerkung: In beiden Fällen haben die Federn eine bestimmte (gemeinsame) Ruhelänge, um die die zugehörige Masse oszilliert. Da die Bewegung hier entlang der vertikalen Achse erfolgt, muss die Gewichtskraft der Masse m berücksichtigt werden. Diese führt allerdings nur dazu, dass die Federn eine neue (nach unten verschobene) Ruhelänge einnehmen. Wir gehen davon aus, dass wir uns auf diese neue Ruhelage beziehen; Sie können die Schwerkraft also in der folgenden Rechnung einfach vernachlässigen.

a) Es sei die Masse m mit den Federn c_1 und c_2 so verbunden, dass diese in Reihe geschalten sind. Das System führt nach einer anfänglichen Anregung Oszillationen aus (Reibungseffekte werden vernachlässigt). Leiten Sie zunächst eine Formel für die Gesamtfederkonstante c_{ges} (in Abhängigkeit von c_1 und c_2) her. Stellen Sie anschließend die Bewegungsgleichung (Differentialgleichung) für das beschriebene System auf und bestimmen Sie dessen Eigenfrequenz.



Lösung:
Gehen wir zunächst von dem Fall aus, dass das System noch nicht in Schwingung versetzt wurde. Wird von oben an der Masse m mit einer Kraft F gezogen, so überträgt sich die Kraft zunächst auf die obere Feder c_1, die dadurch um x_1 nach oben ausgelenkt wird. Dadurch wird die Kraft F auf die darunterliegende Feder c_2 übertragen, die dann ihrerseits um x_2 ausgelenkt wird. Die Federn erzeugen wiederum eine (zu F) gleichgroße, aber entgegengesetzte Rückstellkraft $F_{c_1} = -c_1 x_1$

bzw. $F_{c_2} = -c_2 x_2$. Da beide Federn die selbe Kraft F „spüren" ergibt sich folgende Gesamtauslenkung:

$$x_{ges} = x_1 + x_2 = -\frac{F_{c_1}}{c_1} - \frac{F_{c_2}}{c_2} = \frac{F}{c_1} + \frac{F}{c_2} = \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right) F \,.$$

Da andererseits

$$F_{c_{ges}} = -c_{ges} x_{ges} \qquad \text{und} \qquad F = -F_{c_{ges}}$$

gelten soll, ergibt sich für die Gesamtfederkonstante der Reihenschaltung:

$$\frac{1}{c_{ges}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \,.$$

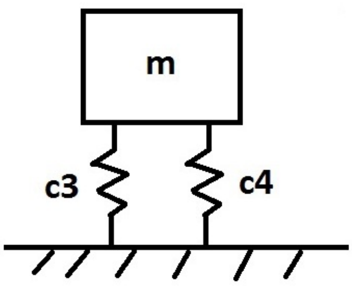
Das System sei nun zum Schwingen angeregt worden. Bewegt sich die Masse m beispielsweise gerade von der Ruhelage aus gesehen nach oben, so erfährt sie durch die Federn eine Rückstellkraft $F = -c_{ges} x_{ges}$ nach unten. Andererseits ist eine Kraft allgemein durch $F = ma = m\ddot{x}_{ges}$ gegeben. Daher erhält man folgende Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_{ges} &= -c_{ges} x_{ges} \\ \ddot{x}_{ges} &= -\frac{c_{ges}}{m} x_{ges} \,. \end{aligned}$$

Macht man den Ansatz $x_{ges}(t) = A\sin(\omega t + \phi)$, und setzt diesen in die Differentialgleichung ein, so erhält man die Eigenfrequenz ω:

$$\begin{aligned} -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi) &= -\frac{c_{ges}}{m} A\sin(\omega t + \phi) \\ \omega^2 &= \frac{c_{ges}}{m} \\ \omega &= \sqrt{\frac{c_{ges}}{m}} \end{aligned}$$

b) Nun seien die Federn c_3 und c_4 mit der Masse m durch eine Parallelschaltung, symmetrisch zum Schwerpunkt (so dass kein Drehmoment entsteht), verbunden. Das System wird in Schwingung versetzt (Reibungseffekte werden vernachlässigt). Bestimmen Sie zunächst wieder die Gesamtfederkonstante c_{ges} und stellen Sie anschließend die Differentialgleichung für das System auf. Ermitteln Sie auch dessen Eigenfrequenz.



Lösung:
Zunächst sei das System in Ruhe. Wird nun wieder mit einer Kraft F von oben an dem System gezogen, verteilt sich diese auf beide Federn. Beide werden um x nach oben ausgelenkt. Dabei üben die Federn ihrerseits eine Rückstellkraft von $F_{c_1} + F_{c_2}$ aus. Damit ergibt sich sofort:

$$-F = F_{c_1} + F_{c_2} = -c_1 x - c_2 x = -\left(c_1 + c_2\right) x$$

Andererseits gilt wiederum:

$$F_{c_{ges}} = -c_{ges} x \qquad \text{und} \qquad -F = F_{c_{ges}} \,.$$

Damit ist

$$c_{ges} = c_1 + c_2$$

die Gesamtfederkonstante der Parallelschaltung. Analog zur Teilaufgabe b) erhält man die Bewegungsgleichung für das oszillierende System,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -c_{ges} x \\ \ddot{x} &= -\frac{c_{ges}}{m} x \,, \end{aligned}$$

und mit Hilfe des Ansatzes $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ die zugehörige Eigenfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{c_{ges}}{m}} \,.$$

c) Bestimmen Sie zu den Anfangsbedingungen $x(t = 0) = 0$ und $\dot{x}(t = 0) = v_0$ die eindeutige Lösung der Differentialgleichung aus Teilaufgabe b); d.h. in der Lösung dürfen keine unbekannten Konstanten mehr auftauchen.
Lösung:

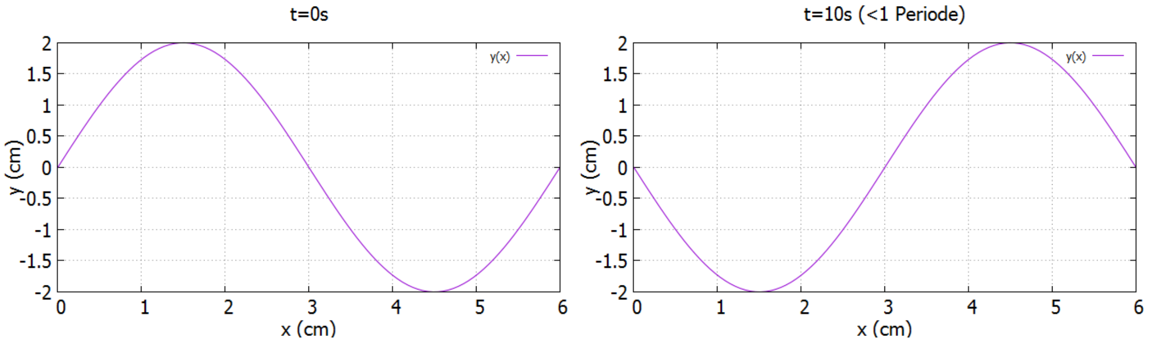
$$\begin{aligned} &x(t=0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A\sin(\omega \cdot 0 + \phi) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A\sin(\phi) = 0 \quad \longrightarrow \quad \phi = 0 \\ &\dot{x}(t=0) = v_0 \quad \Longleftrightarrow \quad A\omega\cos(0) = v_0 \quad \Longleftrightarrow \quad A = \frac{v_0}{\omega} \end{aligned}$$

Daher ist die eindeutige Lösung der Differentialgleichung aus Teilaufgabe b)

$$x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{c_{ges}}{m}}} \sin\left(\sqrt{\frac{c_{ges}}{m}}\, t\right) \,.$$

Aufgabe 2

Schwingendes Seil: In folgenden beiden Abbildungen ist eine Welle dargestellt, die sich nach rechts fortbewegt. Links ist sie zur Zeit t = 0 s zu sehen, rechts 10 Sekunden später (die Periodendauer sei größer als 10 s).



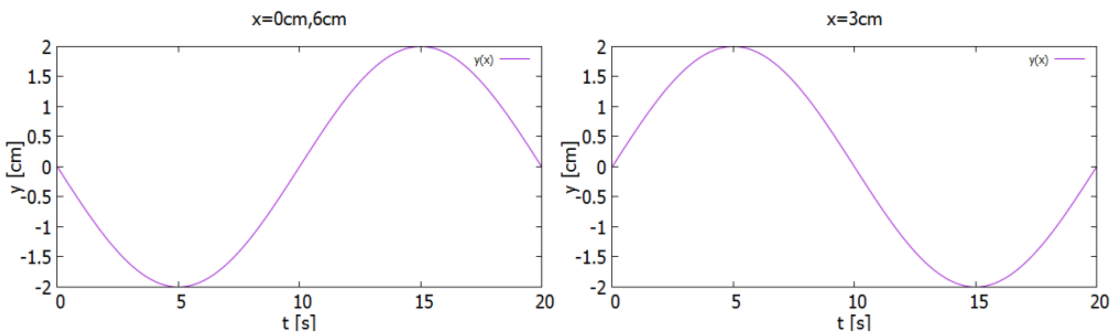
a) Bestimmen Sie i) die Wellenlänge der Welle, ii) die Frequenz der Quelle, welche das Seil zum schwingen bringt, sowie iii) die Geschwindigkeit der Welle.

Lösung:

i) Die Wellenlänge ist $\lambda = 6$ cm.
ii) Für die Frequenz ist zunächst die Periodendauer $T = 20$ s abzulesen. Ferner ist dann $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20\ \mathrm{s}} = 0,05$ Hz die gesuchte Frequenz.
iii) Die Geschwindigkeit ist $v = 0,3\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$.

b) Zeichnen Sie einen Graphen der Auslenkung y als Funktion der Zeit für x = 0 cm, x = 3 cm, x = 6 cm jeweils von t = 0 s bis t = 20 s.

Lösung:



c) Stellen Sie eine Gleichung auf, die die Auslenkung y als Funktion von x und t beschreibt.

Lösung:
Die Gleichung, welche die Auslenkung y als Funktion von x und t beschreibt ist gegeben durch:

$$y(x,t) = A \cdot sin(kx - \omega t) = 2 \cdot sin(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t) = 2 \cdot sin(\frac{2\pi}{6\text{ cm}}x - \frac{2\pi}{20\text{ s}}t).$$

Aufgabe 3

Klingende Orgelpfeifen: Die Länge einer Orgelpfeife beträgt $L = 2,5$ m. Nehmen Sie an, dass die Orgelpfeife am unteren Ende offen und am oberen Ende geschlossen ist. Bei einem Rohrblasinstrument wie solchen Orgelpfeifen liegen an geschlossenen Enden immer „Knoten" der Schwingung und an offenen Enden „Schwingungsbäuche"; daher beträgt die Wellenlänge des Grundtons $4 \cdot L$. Hinweis: Insbesondere für Aufgabenteile b) und c) ist es hilfreich, sich die Lage der Schwingung in der Orgelpfeife aufzuzeichnen.

a) Welche Frequenz besitzt der Grundton der Orgelpfeife?

Lösung:

Für die Wellenlänge des Grundtons gilt: $\lambda_0 = 4L$. Und für die Frequenz: $f = \frac{c_{Luft}}{\lambda_0} = \frac{340\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \cdot 2,5\ \text{m}} = 34$ Hz.

b) Welche Frequenz besitzt der erste Oberton?

Lösung:

Für die Wellenlänge des ersten Obertons gilt: $\lambda_1 = \frac{4L}{3}$. Damit ist die Frequenz: $f = \frac{c_{Luft}}{\lambda_1} = \frac{340\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\frac{10\ \text{m}}{3}} = 102$ Hz.

c) Wie ändert sich die Tonhöhe des Grundtons der Orgelpfeife, wenn das obere Ende ebenfalls offen ist? Welche Frequenz ergibt sich nun?

Lösung:

Bei geöffnetem oberen Ende der Orgel gilt für die Wellenlänge des Grundtons: $\lambda_0 = 2L$. Für die Frequenz gilt entsprechend: $f = \frac{c_{Luft}}{\lambda_0} = 68$ Hz.

d) Welche Frequenz besitzt der erste Oberton einer Orgelpfeife der Länge L_2= 3 m

Lösung:

Analog nach b) ergibt sich die Frequenz $f = \frac{c_{Luft}}{\lambda_1} = \frac{340\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\frac{12\ \text{m}}{3}} = 85$ Hz.