Lösungen zu Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Paris-Geschütz.

a) Unter welchem Abschusswinkel θ hat das Geschütz seine maximale Reichweite (d.h. unter welchem Abschusswinkel schießt es am weitesten)? *Hinweis: Sie können hier die Herleitung aus der Vorlesung benutzen.*
Lösung:
Diese Lösung ist analog zu der Herleitung der Vorlesung. Wir formulieren die Anfangsgeschwindigkeit abhängig von unserem Abschusswinkel θ jeweils in x und in y Richtung

$$v_{0,x} = v_0 cos(\theta) \qquad v_{0,y} = v_0 sin(\theta)$$

Unsere Anfangsbedingungen für den Abschuss sind $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ und $t = 0$. Für die Bewegung in y gilt

$$y = v_0 sin(\theta) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Nun ermitteln wir den Punkt, an dem die Kugel auf dem Boden auftrifft, dies geschieht bei $y = 0$. Für die Zeit folgt dann

$$t = \frac{2 v_0 sin(\theta)}{g}$$

Für die Strecken in x Richtung gilt

$$x = (v_0 cos(\theta)) t$$

Nun können wir unsere Zeit t einsetzen, bei der die Kugel auftrifft, es folgt

$$x = \frac{2 v_0^2}{g} sin(\theta) cos(\theta)$$

Mit der der Identität $sin(\alpha) cos(\alpha) = \frac{1}{2} sin(2\alpha)$ folgt schließlich

$$x = \frac{v_0^2}{g} sin(2\theta)$$

Die Distanz wird maximal, wenn der Sinus maximal wird. Dies ist der Fall für $2\theta = 90°$, also ist $\theta = 45°$ der Abschusswinkel, mit dem die Reichweite maximal wird.

b) Wir gehen nun davon aus, dass eine Granate in einem Winkel von $\theta = 45°$ abgefeuert wird. Mit welcher *Mündungsgeschwindigkeit* v_0 muss die Granate das Geschütz verlassen, um das 130 km entfernte Paris zu erreichen?

Lösung:
Die Entfernung lässt sich mithilfe des Winkels und der *Mündungsgeschwindigkeit* v_0 formulieren als

$$d = \frac{v_0^2}{g} \cdot sin(2\theta)$$

Umstellen liefert

$$v_0 = \sqrt{\frac{d \cdot g}{sin(2\theta)}}$$

Nach einfachen Einsetzen erhält man schließlich

$$v_0 = 1,13 \cdot 10^3 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1130 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

c) Welche maximale Höhe erreicht die Granate aus der letzten Teilaufgabe? Vergleichen Sie diese Höhe mit einer geeigeneten Bezuggröße (z.B. Höhe des Eiffelturmes, Flughöhe eines Passagierflugzeugs).
Lösung:
Die Höhe kann formuliert werden als

$$y = v_0 \cdot sin(\theta) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

y muss maximal werden das heißt, das Extremum ist gesucht

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \cdot sin(\theta) - g \cdot t = 0$$

Umstellen liefert

$$t^* = \frac{v_0 \cdot sin(\theta)}{g}$$

Das t^* bezeichnet nun das Extremum, dies muss wieder eingesetzt werden in die Ausgangsgleichung, um eine Gleichung für die maximale Höhe zu bekommen

$$y(t^*) = \frac{v_0 \cdot sin(\theta) v_0 \cdot sin(\theta)}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \frac{v_0^2 \cdot sin^2(\theta)}{g^2}$$

Vereinfachen und Einsetzen leifert schließlich

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2 \cdot sin^2(\theta)}{g} = 32500 \text{ m} = 32,5 \text{ km}$$

Dies ist ca. 3 mal höher als die Flughöhe eines Passagierflugzeugs. Die Granate erreicht den oberen Teil der Stratosphäre!

d) Wie lange fliegt die Granate, bis sie Paris erreicht?
Lösung:
Wir starten wieder mit der Gleichung

$$y = v_0 \cdot sin(\theta) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Auflösen der Höhe nach der Zeit liefert (Quadratische Gleichung)

$$\frac{v_0 \cdot sin(\theta) \pm \sqrt{v_0^2 \cdot sin^2(\theta)}}{g} \rightarrow t = \frac{2 \cdot v_0 \cdot sin(\theta)}{g}$$

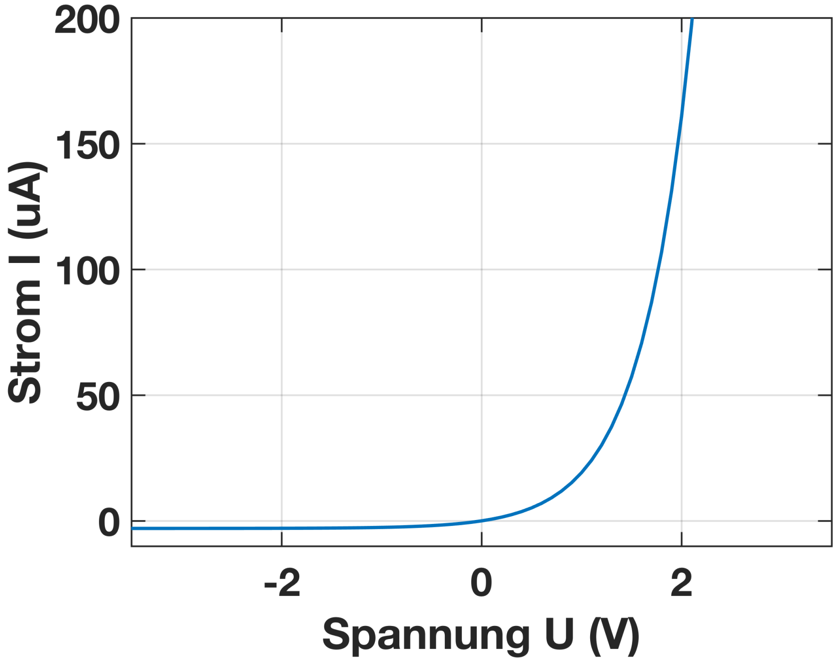
Einsetzen liefert

$$\frac{2 \cdot 1,128 \cdot 10^3 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot sin(45°)}{9,8 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 163 \ \mathrm{s} \approx 3 \ \mathrm{min}$$

Aufgabe 2

Fehlerrechnung und Dioden.

a) Zeichnen Sie den Zusammenhang von Strom I (in μA) als Funktion der angelegten Spannung (in V) für die oben beschriebene Diode.
Lösung:
Die Shockley Gleichung für die beschriebene Diode ist mit der in Aufgabe 2 des 1. Übungsblattes diskutierten Funktion identisch. Eine graphische Darstellung ist unten gezeigt. Man sieht, dass der fließende Strom für negative Spannungen klein und fast konstant ist - dies ist die sogenannte *Sperrrichtung* der Diode. Im Gegensatz dazu steigt der Strom für positive Spannungen, in der *Durchlassrichtung* der Diode, schnell mit der angelegten Spannung an.



b) Sie legen eine Spannung von U = 2,0 V $\pm$ 0,1 V an. Was ist der entsprechende Strom und sein Messfehler nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung?

Lösung:
Nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung ist der Fehler im Strom gegeben durch den Fehler in der angelegten Spannung multipliziert mit der Ableitung des funktionellen Zusammenhangs zwischen Strom und Spannung, evaluiert für die jeweils angelegte Spannung. Berechne zunächst die Ableitung von $I(U)$

$$\frac{\partial I(U)}{\partial U} = \frac{I_S}{U_T} e^{\frac{U}{U_T}}$$

Da wir nur den Fehler der Spannung berücksichtigen, ist direkt

$$\sigma_I = \frac{\partial I(U)}{\partial U} \sigma_U = \frac{I_S}{U_T} e^{\frac{U}{U_T}} \sigma_U$$

Einsetzen von $U = 2{,}0$ V und $\sigma_U = 0{,}1$ V ergibt $I(U) = 160\ \mu\text{A} \pm 33\ \mu\text{A}$.

c) Jetzt legen Sie eine Spannung $U = -2{,}0\ \text{V} \pm 0{,}1\ \text{V}$ an (die Spannung ist negativ!). Was ist der entsprechende Strom, mit Messfehler nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung?

Lösung:
Gleiche Rechnung wie in der letzten Teilaufgabe. Einsetzen von $U = -2{,}0$ V und $\sigma_U = 0{,}1$ V ergibt $I(U) = -2.9\ \mu\text{A} \pm 0.01\ \mu\text{A}$.

d) Warum sind die Messfehler für den Strom in den letzten zwei Teilaufgaben so unterschiedlich, obwohl die Fehler in der Spannungsmessung identisch sind?

Lösung:
Der entscheidende Punkt ist, dass der Fehler der "Input Variable" (U in unserem Fall) in der Gaußschen Fehlerfortpflanzung mit der Ableitung der Funktion, die die gewünschte Messgröße angibt, an der Stelle, für die der Messwert berechnet werden soll, multipliziert wird. Konkret in unserem Fall ist $I(U)$ für negative Spannungen fast konstant (nämlich $\approx -I_S$); da sich $I(U)$ für negative Spannungen kaum mit U ändert (mit anderen Worten: da die Ableitung fast Null ist), führt ein Fehler in U kaum zu einem Fehler in $I(U)$. Im Gegensatz dazu steigt $I(U)$ für positive U schnell an, d.h. die Ableitung ist groß, und selbst ein kleiner Fehler in U führt zu einem großen Fehler in $I(U)$.

Aufgabe 3

Die Atwood'-sche Fallmaschine.

a) Zeigen Sie, mithilfe des zweiten Newton'sche Axiom, dass für die Zugkraft im Seil gilt:

$$F_S = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \tag{1}$$

Lösung:
Auf die Massen wirkt einerseits die Schwerkraft und ihr entgegen die Kraft des Seils. Das zweite Newton'sche Axiom $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ kann nun auf beide Massen angewandt werden. Es ergeben sich zwei Gleichungen mit der Seilkraft F_S und der Beschleunigung a im Betrag

$$F_S - m_2 g = m_2 a_2$$

und

$$m_1 g - F_S = m_1 a_1$$

Nun können diese zwei Gleichungen addiert werden und man erhält

$$(m_1 - m_2) g = (m_1 + m_2) a$$

wobei $a_1 = a_2$ ist, da die beiden Massen mit einem Seil verbunden sind. Nun kann man die Gleichung nach a umstellen

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

diesen neuen Ausdruck für die Beschleunigung kann man nun in eine der beiden Startgleichungen einsetzen und man erhält schließlich

$$F_S = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

b) Liefert diese Gleichung für den Fall $m_1 = m_2$, sowie für die Grenzfälle $m_1 \gg m_2$ und $m_1 \ll m_2$ ein sinnvolles Ergebnis?

Lösung:
Ist $m_1 = m_2$, so ergibt sich für die Zugkraft logischerweise

$$F_S = mg$$

Nun zum Grenzfall $m_1 \ll m_2$, es ist hilfreich die Gleichung für die Beschleunigung und Zugkraft umzuformen also m_2 im Nenner auszuklammern

$$a = \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} g \qquad F_S = \frac{2 m_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} g$$

Für diesen Grenzfall folgt dann

$$a = -g \qquad F_S = 2 m_1 g$$

Für den Fall $m_1 \gg m_2$ kann man wieder die Gleichungen umformen und m_1 ausklammern, es folgt

$$a = \frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} g \qquad F_S = \frac{2 m_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} g$$

Daraus folgt dann

$$a = g \qquad F_S = 2 m_2 g$$

c) Es sei eine der beiden Massen 1,7 kg. Welche Masse muss das andere Gewicht haben, damit der Betrag der Verschiebung relativ gesehen in der ersten Sekunde nach dem Loslassen 0,2 m beträgt?
Hinweis: Nehmen Sie eine gleichförmige Beschleunigung beider Massen in y- Richtung an.

Lösung:
Aus der ersten Teilaufgabe wissen wir, dass sich die Beschleunigung formulieren lässt als

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

Dies lässt sich auflösen nach einer der beiden Massen zu

$$m_1 = m_2 (\frac{g + a}{g - a})$$

Nun kann die Gleichung für die gleichförmige Beschleunigung benutzt werden mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$

$$\Delta y = v_0 t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

Nun können wir auflösen und einsetzen, für die Beschleunigung erhält man dann

$$a = \frac{2\Delta y}{(\Delta t)^2} = \frac{2 \cdot (0,20 \text{ m})}{(1,0 \text{ s})^2} = 0,400 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Nun können wir unsere Beschleunigung in die vorherige Gleichung einsetzen und man erhält

$$m_1 = m_2 (\frac{9,81 \ m \cdot s^{-2} + 0,400 \ m \cdot s^{-2}}{9,81 \ m \cdot s^{-2} - 0,400 \ m \cdot s^{-2}}) = 1,09 \cdot m_2$$

Ist nun $m_1 = 1,7$ kg, dann ist $m_2 = 1,6$ kg oder falls $m_2 = 1,7$ kg, dann ist $m_1 = 1,9$ kg