Lösungen zu Übungsblatt 4

Aufgabe 1

actio=reactio. Käptn Jack Sparrow wird mit seinem Schiff Black Pearl in eine Seeschlacht verwickelt. Sobald das gegnerische Schiff ihn angreift, ruft er den Befehl: ,,Feuer erwidern“. Im Rumpf des Schiffbauches stehen 50 kg schwere Kanonen, mit denen seine Matrosen gemäß dem Prinzip ,,actio=reactio“ den Angriff erwidern. Dazu laden sie die Kanonen mit 5 kg schwere Kanonenkugeln. Die Kanonen zeigen 30°nach oben, d.h. der Abschusswinkel ist 30°. Angenommen die Kugeln werden innerhalb von 0,1 s auf 100 m/s beschleunigt. Auf dem ganzen Übungsblatt ist die Näherung erlaubt a=$\frac{\Delta v}{\Delta t}$ für die Zeit und Geschwindigkeiten zu benutzen, d.h. wir gehen von gleichmässig beschleunigter Bewegung aus.

a) Welche Beschleunigung wirkt auf die Kanonenkugel? Welche Kraft ist dazu nötig?
Lösung:

Da wir die Beschleunigung als gleichmäßig nähern, kann die Formel a=$\frac{\Delta v}{\Delta t}$ verwendet werden:

$$a_{\text{Kugel}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{100 \text{ m/s}}{0,1\text{s}} = 1000 \text{ m/s}^2$$
$$F_{\text{Kugel}} = m_{\text{Kugel}} \cdot a_{\text{Kugel}} = 5 \text{ kg} \cdot 1000\text{m/s}^2 = 5000 \text{ N} = 5 \text{ kN}$$

b) Welche Kräfte wirken auf die Kanone in horizontaler und vertikaler Richtung während des Schusses, wenn wir Reibungskräfte zunächst vernachlässigen?
Lösung:

Da actio=reactio gilt, wirkt auf die Kanone während der Beschleunigung die selbe Kraft wie auf die Kanonenkugel, nur in entgegengesetzter Richtung.

$$F_{\text{Kanone}} = -F_{\text{Kugel}} = -5 \text{ kN}$$

Nun kann man die Kraftkomponenten in horizontaler und vertikaler Richtung mithilfe der trigonometrischen Funktionen ausrechnen. In vertikaler Richtung wirkt zusätzlich die Gewichtskraft:

$$\begin{aligned} F_{\text{horizontal}} &= F_{\text{Kanone}} \cdot \cos(30°) = -5 \ \text{ kN} \cdot \cos(30°) = -4.33 \ \text{ kN} \\ F_{\text{vertikal}} &= F_{\text{Kanone}} \cdot \sin(30°) - F_{\text{Gewicht}} = -5 \ \text{ kN} \cdot \sin(30°) - 50 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \\ &= -2.5 \ \text{ kN} - 0.4905 \text{ kN} = -2.9905 \text{ kN} \approx -3 \text{ kN} \end{aligned}$$

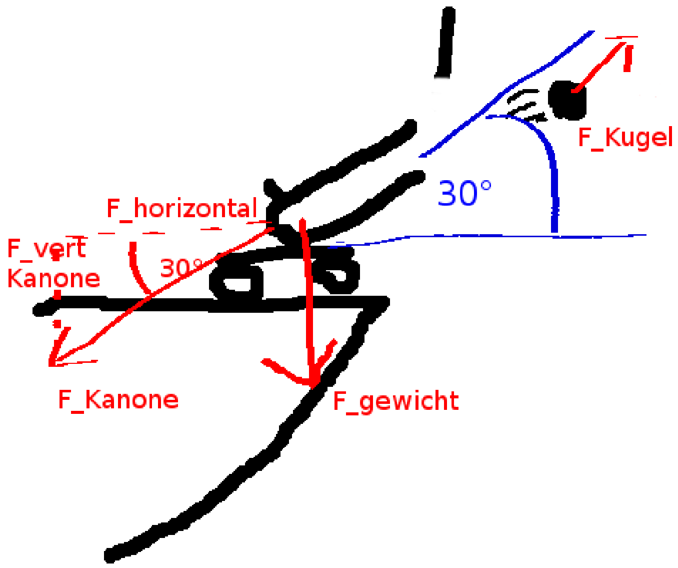

Abbildung 1: Die Kanone auf dem Piratenschiff und Kräftezerlegung

c) Welche Beschleunigung erfährt die Kanone in horizontaler Richtung, wenn sie mit einem Gleitreibungskoeffizienten $\mu_{R,G} = 0{,}34$ im Schiff rutscht.
Lösung:
Die wirkenden Kräfte sind die horizontale Kraft und die entgegengesetzte Reibungskraft. Diese müssen addiert werden zur Gesamtkraft:

$$\begin{aligned} F_{\text{Reibung}} &= \mu_{R,G} \cdot F_{\text{vertikal}} = 0,34 \cdot (-)2.9905 \text{ kN} = -1.016 \quad \text{kN} \approx -1 \text{ kN} \\ F_{\text{gesamt}} &= F_{\text{horizontal}} + F_{\text{Reibung}} = 4,33 \text{ kN} - 1.016 \text{ kN} = 3.314 \text{ kN} = 3314 \text{ N} \end{aligned}$$

Mit F = m·a folgt dann für die Beschleunigung:

$$a_{\text{Kanone}} = \frac{F_{\text{gesamt}}}{m_{\text{Kanone}}} = \frac{3314 \text{ N}}{50 \text{ kg}} = -66.28 \text{ m/s}^2$$

Aufgabe 2

Ultrazentrifuge. Ein wichtiges Laborgerät zur Analyse und Präparation von biologischen Proben ist die Ultrazentrifuge, für die der Schwede Theodor Svedberg 1926 den Chemie-Nobelpreis erhielt. In der Beschreibung des Rotors (Typ MLA-130) einer modernen Ultrazentrifuge lesen Sie: MLA-130 Rotor Package, Fixed Angle, Titanium, 10 x 2.0 mL, 130,000 rpm, 1,019,000 x g.
Hinweis: Physik ist die Kunst zu wissen, was relevant ist. Oder wie Helmholtz sagte: ,,Es kommt darauf an die richtigen Fragen zu stellen".

a) Mit wie viel Hertz dreht sich die Zentrifuge?
Lösung:

$$130\,000 \text{ rpm} = 1.3 \times 10^5 \text{ U/min} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 2167 \quad \text{Hz} = \text{Frequenz} = f$$

b) Wie groß ist der Radius des Rotors auf den sich die Angaben beziehen?
Lösung:
Die Gleichung, um die Lösung zu berechnen ist $a_{\text{zentripetal}} = \omega^2 \cdot r$ wobei

$$a_{\text{zentripetal}} = 1,019 \cdot 10^6 g = 1,019 \cdot 10^6 \cdot 9.81 \ \text{m/s}^2 = 10 \times 10^6 \ \text{m/s}^2$$
$$\text{und } \omega = 2\pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 2167 \text{ Hz} = 1.36 \times 10^4 \ \text{rad/s}$$

Daraus folgt für den Radius:

$$r = \frac{a_{\text{zentripetal}}}{\omega^2} = \frac{10 \times 10^6 \ \text{m/s}^2}{(1.36 \times 10^4 \ \ \text{rad/s})^2} = 54 \ \text{mm}$$

c) Wie schnell ist der Zentrifugenarm am äußersten Punkt in km/h?
Lösung:
Einsetzen in bekannte Gleichung aus der Vorlesung ergibt:

$$v = \omega \cdot r = 1.36 \times 10^4 \ \ \text{rad} \cdot 0.054 \times 10^{-3} \ \ \text{m} = 733.6 \ \ \text{m/s} = 2641 \ \ \text{km/h}$$

Aufgabe 3

Haft- und Gleitreibung. Ein Physikprofessor namens Jan will mit seinem guten Freund Martin einen hohen Berg besteigen. Dazu müssen sie einen Gletscher überqueren. Sie seilen sich aneinander an, damit sie sich gegenseitig helfen können, falls einer von den beiden in eine Gletscherspalte fällt. Martin läuft vorne und Jan hinten. Sie laufen frühmorgens los, solange das Eis noch hart ist und die Steigeisen mehr Halt haben. Als sie gerade das letzte steile Stück mit 40°vor dem Gipfel erklimmen fällt der vordere der beiden in eine senkrechte Gletscherspalte. Das Seil zwischen den beiden ist 10 m lang und kann als masselos genähert werden. Ebenso ist die Reibung des Seiles auf dem Eis zu vernachlässigen.

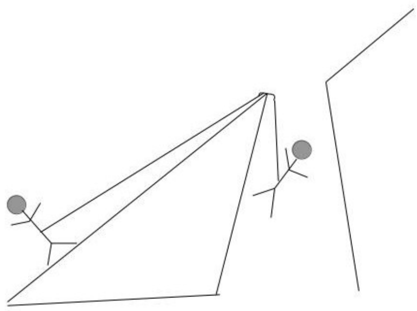

Abbildung 2: Martin fällt in die Gletscherspalte. Der Hangwinkel beträgt 40°

a) Martin, der nun in der senkrechten Spalte hängt, wiegt 80 kg. Wenn wir zunächst annehmen, dass das Eis perfekt rutscht, also keine Reibung besitzt. Wie schwer müsste dann Jan sein, um den Vorderen nur durch sein Gewicht zu halten?
Lösung:

Es geht um ein Gleichgewicht der Kräfte. Bei Martin ist es seine volle Gewichtskraft, bei Jan jedoch nur die Hangabtriebskraft, also der Teil, seiner Gewichtskraft welcher parallel zum Hang verläuft. Diesen Teil der Kraft nennen wir ,,Jan,H" für Hangabtriebskraft und der Normalteil ,,Jan,N". Mit dem bekannten Winkel kann man die Hangabtriebskraft mithilfe des Sinus bestimmen.

$$\begin{aligned} F_{\text{Jan,H}} &= F_{\text{Martin}} \\ m_{\text{Jan}} \cdot g \cdot \sin(40°) &= m_{\text{Martin}} \cdot g \\ m_{\text{Jan}} &= \frac{m_{\text{Martin}}}{\sin(40°)} = 124.5 \quad \text{kg} \end{aligned}$$

b) Jan wiegt jedoch auch nur ca. 80 kg und so reißt es ihn durch den Sturz des Vordermannes nach vorne, wo er beginnt über das Eis zu rutschen. Wie groß ist die resultierende Kraft, mit der er hangaufwärts gezogen wird?
Lösung:
Grundidee hier ist die Kräfteaddition. Mit der Angabe der Masse von Jan, kann man aus seiner Hangabtriebskraft und der Gewichtskraft von Martin, die resultierende Gesamtkraft F_{ges} ausrechnen:

$$\begin{aligned} F_{\text{ges}} &= F_{\text{Martin}} - F_{\text{Jan,H}} = m_{\text{Martin}} \cdot g - m_{\text{Jan}} \cdot g \cdot \sin(40°) \\ &= m_{\text{Jan}} \cdot g \cdot (1 - \sin(40°)) = 80 \quad \text{kg} \cdot 9.81 \quad \text{m/s}^2 \cdot (1 - \sin(40°)) \\ &= 280.3 \quad \text{N} \end{aligned}$$

Hier haben wir ausgenutzt, dass $m_{\text{Jan}} = m_{\text{Martin}}$. Es lohnt sich anzumerken, dass F_{ges} die Kraft ist, die auf das ,,Gesamtsystem" der Seilschaft wirkt. Mit dieser Kraft wird Martin nach unten und Jan nach oben gezogen. Es wirkt nicht jeweils auf Jan und Martin diese Kraft.

c) Wie groß müsste der Gleitreibungskoeffizient des Eises sein, damit Jan ohne eigene Anstrengung stehen bleibt? Schätzen Sie ab (Intuition ist nicht immer richtig, aber oft hilfreich) oder schauen Sie nach ob Eis genug Gleitreibung besitzt, damit Jan nur durch diesen Effekt gestoppt wird.
Lösung:
Nun soll eine weitere Kraft dazu kommen, welche genau entgegengesetzt aber gleich groß ist, wie die in der letzten Teilaufgabe ausgerechnete Gesamtkraft, welche auf Jan wirkt. Da die Reibungskraft immer entgegengesetzt der Bewegungsrichtung ist, müssen wir also lediglich die Größe ausrechnen. Wir können die bekannte Formel für die Gleitreibungskraft benutzen, wobei wir die Normalkraft brauchen, welche Jan auf das Eis ausübt. Diese können wir uns mit geometrischen Überlegungen herleiten:

$$\begin{aligned} F_{\text{Jan,N}} &= F_{\text{Jan,Gewichtskraft}} \cdot \cos(40°) = m_{\text{Jan}} \cdot g \cdot \cos(40°) \\ &= 80 \quad \text{kg} \cdot 9.81 \quad \text{m/s}^2 \cdot \cos(40°) = 601.2 \quad \text{N} \end{aligned}$$

Nun müssen wir nur noch die Formel $F_{\text{Gleitr}} = \mu \cdot F_{\text{N}}$ für die Gleitreibung umstellen und mit der Bedingung $F_{\text{Gleitr}} = F_{\text{Jan,ges}}$ erhalten wir den gefragten Gleitreibungskoeffizienten:

$$\mu_{\text{Eis}} = \frac{F_{\text{Gleit}}}{F_{\text{Jan,N}}} = \frac{F_{\text{ges}}}{F_{\text{Jan,N}}} = \frac{280.3 \quad \text{N}}{601.2 \quad \text{N}} = 0,466$$

Reibungskoeffizienten von verschiedenen Materialien auf Eis gehen von 0,01 bis 0,05. Allgemein rutscht Eis gut und der Reibungskoeffizient wäre sicher nicht groß genug um Jan zu halten.

d) Wie viel Zeit bleibt Jan um zu reagieren, bevor er ebenfalls in die Spalte fällt? (Angenommen die Startgeschwindigkeit ist 0, es sind noch 8 m bis zur Spalte und bei Vernachlässigung des Gleitreibungskoeffizienten.)
Lösung:
Es handelt sich um eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Bei Vernächlässigung der Gleitreibungskraft (ist gerechtfertigt, da sehr klein) können wir die Beschleunigung, die Jan erfährt mithilfe der Lösung aus b.) sowie der allgemeinen Formel $F = m \cdot a$ ausrechnen. Es muss allerdings beachtet werden, dass F_{ges}, die Kraft ist, mit der Martin nach unten und somit Jan nach oben gezogen wird. Die Kraft wirkt also auf das ,,Gesamtsystem" der Seilschaft. Daher muss man hier die Massen der beiden addieren.

$$a_{\text{Jan,ges}} = \frac{F_{\text{Jan,ges}}}{m_{\text{Jan}} + m_{\text{Martin}}} = \frac{280.3 \ \ \text{N}}{160 \ \ \text{kg}} = 1.752 \ \text{m/s}^2$$

Da $v_0 = 0$ können wir nun die Formel für beschleunigte Bewegungen $s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + 0,5a \cdot t^2$ nach der Zeit auflösen. Entweder wir setzen $s_0 = 0$ und rechnen für s(t)=8 m oder wir denken andersherum und sagen s(t)=0, also 0 m bis zur Spalte und setzen $s_0 = -8$ m. In beiden Fällen finden wir bei Auflösen nach t folgende Formel:

$$t = \sqrt{2 \cdot \frac{s}{a_{\text{Jan,ges}}}} = \sqrt{2 \cdot \frac{8 \ \text{m}}{1.752 \ \text{m/s}^2}} = 3,022 \ \text{s}$$