Übungsblatt 5
Besprechung am 28.11.2017/30.11.2017

Aufgabe 1

Bungeeseil Energieerhaltung. Fred steht auf einer Brücke 200 m über einem spitzen Felsen. Fred möchte den Bungeesprung so durchführen, dass er am tiefsten Punkt mit seinem Kopf die Spitze des Felsens zwar berührt, dabei allerdings keine Relativgeschwindigkeit mehr zum Felsen hat (physikalisch gesehen ist das also völlig ungefährlich). Nähern Sie das Bungeeseil als ideale Feder und vernachlässigen Sie den Luftwiderstand.

a) Schlagen Sie Fred ($m = 90{,}0\,\mathrm{kg}$) ein Seil vor mit dem er diesen Sprung durchführen kann.
Hinweis: Rechnen Sie mit dem Energieerhaltungssatz und berechnen Sie die benötigte Federkonstante für eine beliebige sinnvolle Ausgangslänge des Seils.

Lösung:

Energieerhaltung $\rightarrow$ Höhenenergie = elastische Energie

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta x^2 \tag{1}$$

$$\Rightarrow k \cdot \Delta x^2 = 2 \cdot m \cdot g \cdot h = 2 \cdot 90\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 200\,\mathrm{m} = 353\,\mathrm{kJ} \tag{2}$$

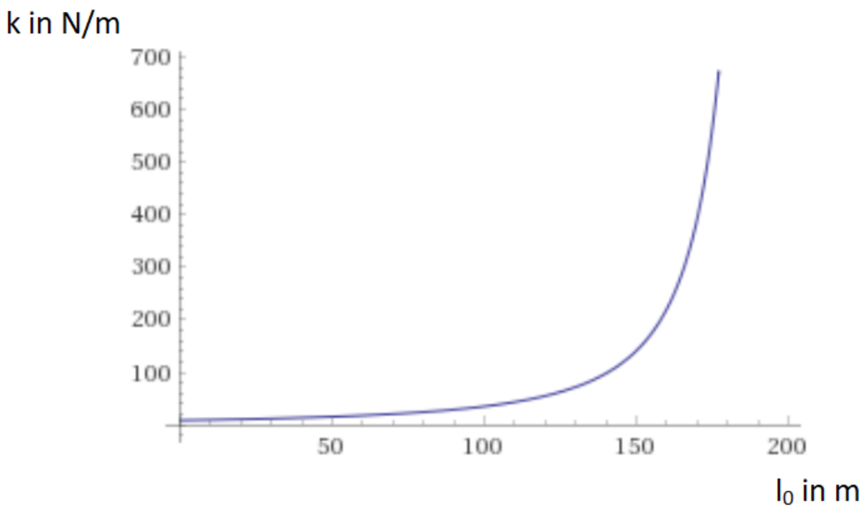
Δx ist die Auslenkung des Seils aus der Nulllage. l_0 ist die Länge des Seils wenn keine Kraft auf das Seil wirkt. Für die Auslenkung im unteren Umkehrpunkt gilt also:

$$\Delta x = (200\,\mathrm{m} - l_0) \tag{3}$$

Wir erhalten also folgende Funktion $k(l_0)$:

$$k(l_0) = \frac{353 \cdot 10^3}{(200 - l_0/m)^2} \frac{N}{m} \tag{4}$$

Hier wird l_0 durch m geteilt, damit beide Terme in der Klammer einheitenlos sind. Jedes Seil auf diesem Graph erfüllt die Bedingung. Geht die Ausgangslänge des Seils gegen 200 m so geht die Federkonstante gegen unendlich, da das Seil Fred dann praktisch instantan stoppen müsste. Für das nur theoretisch mögliche Seil mit Ausgangslänge $l_0 = 0\,\mathrm{m}$ ergäbe sich eine Federkonstante von $k = 8{,}83\,\mathrm{N/m}$ (y-Achsenabschnitt des Graphen). Ein Beispiel für ein in der Praxis verwendbares Seil wäre ein Seil der Ausgangslänge $l_0 = 100\,\mathrm{m}$ mit der Federkonstante $k = 35{,}3\,\mathrm{N/m}$.



b) Mit den Annahmen aus Aufgabe a) würde Fred nachdem er den Stein berührt hat auch wieder die volle Höhe erreichen, also gegen die Brücke prallen, oder im besten Fall wieder auf der Brücke stehen. In der Praxis beobachten wir das nicht. Bedeutet das, dass die Energieerhaltung nur in der Theorie Gültigkeit hat?

Lösung:

Nein, obwohl er seine Anfangshöhe nicht mehr erreicht gilt Energieerhaltung. Die verlorene Höhenenergie verschwindet nicht, sondern wird in andere Energieformen umgewandelt, wie zum Beispiel Wärmeenergie im Seil oder Bewegungsenergie der Luftmoleküle.

Aufgabe 2

Felix Baumgartner vs. Gewöhnlicher Fallschirmspringer. Ein gewöhnlicher Fallschirmspringer mit einer Masse von $m = 90{,}0\,\mathrm{kg}$ springt aus einer Höhe von $4{,}00\,\mathrm{km}$ aus einem Flugzeug. Die bei diesem Sprung auftretenden Reibungskräfte können gut durch die in der Vorlesung besprochene Newton'sche Reibung genähert werden.

a) In der stabilen Flugposition mit gespreizten Armen und Beinen hat der Fallschirmspringer eine Referenzfläche von $A = 0{,}800\,\mathrm{m}^2$ und einen C_W von $0{,}715$. Die Dichte von Luft beträgt $1{,}00\,\mathrm{kg/m}^3$. Welche maximale Endgeschwindigkeit kann der Fallschirmspringer in dieser Position erreichen?

Lösung:

Formel für Newton'sche Reibung:

$$F_W = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot C_W \cdot v^2 \tag{5}$$

Für die Endgeschwindigkeit muss gelten:

$$F_W = F_G \tag{6}$$
$$m \cdot g = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot C_W \cdot v^2 \tag{7}$$
$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot A \cdot C_W}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 90\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{1\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}8\,\mathrm{m^2} \cdot 0{,}715}} = 55{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 200\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \tag{8}$$

b) Der Fallschirmspringer möchte jetzt so schnell wie möglich fallen, deshalb springt er mit dem Kopf voraus, wodurch sich zum einen seine Referenzfläche auf $0{,}150\,\mathrm{m^2}$ verringert und er etwas „windschnittiger“ wird, weshalb sein C_W-Wert auf 0,610 sinkt. Wie schnell kann er jetzt maximal werden?

Lösung:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 90\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{1\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}15\,\mathrm{m^2} \cdot 0{,}610}} = 139\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 500\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \tag{9}$$

c) Am 14. Oktober 2012 erreichte Felix Baumgartner eine Geschwindigkeit von 1357,6 km/h im freien Fall. Wie war das möglich? Welche Dichte der Luft ist nötig um diese Endgeschwindigkeit zu erreichen? Bei dieser Geschwindigkeit ist eine stabile Fluglage unmöglich, man rotiert unkontrolliert. Rechnen Sie deshalb mit den Flächen- und C_W-Werten aus a).

Lösung:

Er sprang aus fast 40 km Höhe wo die Atmosphäre viel dünner ist.

$1357{,}6\,\mathrm{km/h} = 377{,}11\,\mathrm{m/s} > v_{Schall} = 343{,}2\,\mathrm{m/s}$! wobei v_{schall} die Schallgeschwindigkeit in Bodennähe ist.

$$\rho = \frac{2 \cdot m \cdot g}{A \cdot C_W \cdot v^2} = 0{,}0217\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \tag{10}$$

Aufgabe 3

Gravitation und Umlaufbahnen. Sputnik 1 war der erste Erdsatellit und damit das erste von Menschen hergestellte Objekt, das die Erde umkreiste. Der russische Satellit wurde vor etwas mehr als 60 Jahren am 04. Oktober 1957 von einer Rakete in einen Erdorbit geschossen und startete damit den „Wettlauf ins All“ zwischen den Russen und Amerikanern. Die Amerikaner gewannen schließlich den Wettlauf mit der Mondlandung am 21. Juli 1969, mithilfe der Saturn V Rakete, die unter der Leitung des deutschen Physikers Wernher von Braun konstruiert wurde.

Der Sputnik hatte eine Masse von $m_S = 83{,}7\,\mathrm{kg}$. In der folgenden Aufgabe können sie die Erdrotation und die Luftreibung der Atmosphäre vernachlässigen.

a) Stellen Sie eine Gleichung für stabile, kreisförmige Umlaufbahnen um die Erde auf. Geben Sie einen Ausdruck für die Umlaufzeit (d.h. die Zeit für eine vollständige Umrundung der Erde) als Funktion des Radius der Umlaufbahn an.

Lösung:

Für stabile, kreisförmige Umlaufbahnen gilt:

$$F_{Gravitation} = F_{Zentripetal} \tag{11}$$

$$G \frac{M_E \cdot m_S}{r^2} = m_S \cdot \omega^2 \cdot r \tag{12}$$

$$\tag{13}$$

$$G \cdot M_E = \omega^2 \cdot r^3 \tag{14}$$

mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ folgt:

$$\Rightarrow G \cdot M_E = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^3 \tag{15}$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G \cdot M_E} \cdot r^3} \tag{16}$$

b) Nehmen Sie an, dass sich Sputnik 1 auf einer kreisförmigen Umlaufbahn 180 km über der Erdoberfläche befindet. Wie lange benötigt der Satellit für eine Umrundung der Erde? Wie würde sich die Umlaufzeit ändern wenn der Satellit auf gleicher Höhe um den Mond statt um die Erde kreiste? Welche Umlaufgeschwindigkeiten ergeben sich jeweils?

Lösung:

zu recherchierende Werte:

$$M_{Erde} = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \tag{17}$$

$$M_{Mond} = 7{,}349 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg} \tag{18}$$

$$r_{Erde} = 6371\,\mathrm{km} \tag{19}$$

$$r_{Mond} = 1738\,\mathrm{km} \tag{20}$$

$$G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \tag{21}$$

mit:

$$r_{Umlaufbahn} = r_{Planet,Mond} + r_{Satellit} \tag{22}$$

Einsetzen in Gleichung (16):

$$T_{Erde} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg\,s}^2) \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}} \cdot ((6551 \cdot 10^3\,\mathrm{m})^3} = 5278{,}59\,\mathrm{s} \approx 88{,}0\,\mathrm{min} \tag{23}$$

analog:

$$T_{Mond} = 7538{,}34\,\mathrm{s} \approx 126\,\mathrm{min} \tag{24}$$

Geschwindigkeit:
mit

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \tag{25}$$

oder

$$\omega = \frac{v}{r} \text{ und } (14) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \tag{26}$$

ergibt sich:

$$\rightarrow v_{Erde} = 7798\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 7{,}80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = 28{,}1 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}, \tag{27}$$

$$\rightarrow v_{Mond} = 1599\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 1{,}60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = 5{,}76 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}. \tag{28}$$

c) Was kann man über die Umlaufzeiten von Satelliten sagen, die in kleinen Höhen um Planeten mit verschiedenen Größen aber gleichen mittleren Dichten fliegen? *Hinweis*: Sie dürfen annehmen, dass $r_{Planet} \approx r_{UmlaufbahnSatellit}$ ist. Ersetzen Sie außerdem die Masse des umkreisten Planeten durch die mittlere Dichte multipliziert mit dem Volumen.

Lösung:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r_{Planet}^3} \cdot r_{UmlaufbahnSatellit}^3} \tag{29}$$

$$\approx \sqrt{\frac{3\pi}{G \cdot \rho}} \tag{30}$$

Ergebnis: Für Planeten unterschiedlicher Größe aber gleicher mittlerer Dichte sind die Umlaufzeiten von niedrigen Satelliten (niedrig im Vergleich zum Planetenradius) gleich. Die mittleren Dichten von Planeten in unserem Sonnensystem unterscheiden sich allerdings relativ stark: $\rho_{Erde} \approx 6\,\mathrm{g/cm^3}$, $\rho_{Mars} \approx 4\,\mathrm{g/cm^3}$, $\rho_{Jupiter} \approx 1\,\mathrm{g/cm^3}$.

d) Kann man aus der Beobachtung der Umlaufzeit und der Umlaufbahn auf das Gewicht des Satelliten schließen? Warum oder warum nicht? Warum war die Antwort für amerikanische Wissenschaftler sehr relevant?

Lösung:

Wie man aus der Formel aus Teilversuch a) erkennt, kann man aus der Umlaufbahn (Umlaufzeit u. Radius) nicht auf die Masse des Satelliten schließen, da sich die Masse des Satelliten rauskürzt. Für amerikanische Forscher war das Gewicht des Satelliten interessant, weil sie wissen wollten wie groß die Nutzlast der Rakete war. Während des Kalten Krieges wussten die Amerikaner nicht, wie weit fortgeschritten die russische Raketentechnik war. Die erfolgreiche Sputnik-1-Mission zeigte, dass sowjetische Raketen den Weltraum erreichen konnten und dass die Sowjetunion deshalb wahrscheinlich auch in der Lage war das Territorium der USA mit nuklear bestückten Interkontinentalraketen zu erreichen. Diese Erkenntnis löste ein Gefühl der Bedrohung in der westlichen Welt aus („Sputnikschock").

e) Ein Fernsehsatellit mit dem gleichen Gewicht wie der Sputnik 1 hat eine geosynchrone Umlaufbahn. Wie hoch ist seine Umlaufbahn? Warum sind geosynchrone Umlaufbahnen für Fernsehsatelliten praktisch? Gibt es geosynchrone Satelliten über Deutschland?

Lösung:

Geosynchrone Umlaufbahn bedeutet, dass er von der Erde aus gesehen immer über dem selben Punkt steht (also $T = 1\,\mathrm{d}$). Man muss die Fernsehantenne dann nur einmal ausrichten und hat immer Empfang! Direkt über Deutschland gibt es keine geostationäre Satelliten, da die Rotationsachse der Satellitenbahn übereinstimmen muss mit der Achse der Erdrotation. Geosynchrone Satelliten stehen also immer über dem Äquator.

Höhe:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86\,400\,\mathrm{s}} = 7{,}31 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Hz} \tag{31}$$

Umformen von (14) nach r liefert:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_E}{\omega^2}} = 42\,094\,\mathrm{km} \approx 42{,}1 \cdot 10^6\,\mathrm{m} \tag{32}$$

Abzüglich Erdradius: $h = 35\,723\,\mathrm{km} \approx 35{,}7 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$

f) Welchen Einfluss hat die Luftreibung der Atmosphäre auf Satelliten? Was bedeutet das für ihre Lebensdauer?

Lösung:

Die Luftreibung bremst die Satelliten, was die Umlaufgeschwindigkeit und somit den Radius der Umlaufbahn kontinuierlich verringert, bis die Satelliten in tieferen Schichten der Erdatmosphäre verglühen. Die Lebensdauer eines Satelliten ist also ohne Triebwerke begrenzt. Das ist besonders für niedrige Satelliten relevant, da dort die Atmosphäre dichter und damit die Reibung höher ist. Ab einer Höhe von 1000 km kann man die Luftreibung vernachlässigen.