Lösungen zu Übungsblatt 6

Aufgabe 1

Gemini VIII. Nach dem Flug des Sputnik-Satelliten entwickelte sich schnell ein Wettlauf ins Weltall. John F. Kennedy verkündete 1962, die USA werden noch vor 1970 einen Menschen auf den Mond bringen. Dazu waren Technologien notwendig, die im Gemini-Programm erprobt werden sollten. Das Aneinanderkoppeln von Raumfahrzeugen übernahm Neil Armstrong. Er war damit nicht nur der erste Mensch, der seinen Fuß auf den Mond setzte, sondern war auch zusammen mit David Scott der erste, dem es gelang, an Bord von Gemini VIII im Orbit um die Erde zwei Raumfahrzeuge zu docken. (Nützliche Größen: $m_{\text{Gemini}} = 3{,}8$ t , $m_{\text{GATV}} = 1{,}9$ t)

a) Gemini VIII dockte am 16. März 1966 an das Gemini-Agena Target Vehicle (GATV) an. Dabei näherte sich Gemini VIII mit 0,3 m/s. Wir wählen unsere Koordinaten so, dass vor dem Docken $v_{\text{GATV}} = 0$ gilt. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Gespanns nach dem Docken, unter der Annahme, dass sich das Gespann nach dem Docken als eine Einheit weiterbewegt (d.h. vollständig inelatischer Stoß).
Lösung:

Wir sollen von einem inelastischen Stoß ausgehen (die beiden Raumfahrzeuge sind nach dem Dockvorgang miteinander verbunden), können das Problem eindimensional beschreiben und verwenden deswegen die in der Vorlesung hergeleitete Formel für die Geschwindigkeit nach einem vollständig inelastischen Stoß:

$$v_{\text{Gespann}} = \frac{m_{\text{Gemini}} \cdot v_{\text{Gemini}}}{m_{\text{Gemini}} + m_{\text{GATV}}} = \frac{3{,}8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 0{,}3 \text{ m/s}}{3{,}8 \cdot 10^3 \text{ kg} + 1{,}9 \cdot 10^3 \text{ kg}} = 0{,}2 \text{ m/s}$$

b) Berechnen Sie die kinetischen Energien der Raumkapseln vor dem Docken und des Gespanns nach dem Docken. Sie kennen die Energieerhaltung als fundamentales Prinzip in der Physik. Wie erklären Sie Ihre Ergebnisse?
Lösung:

Die kinetischen Energien vorher und nachher lassen sich mit den bekannten Größen berechnen.

$$\begin{aligned} E_{\text{kin, vorher}} &= E_{\text{kin, Gemini}} + E_{\text{kin, GATV}} \\ E_{\text{kin, nachher}} &= E_{\text{kin, Gespann}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\text{kin, Gemini}} &= \frac{1}{2} \cdot m_{\text{Gemini}} \cdot v^2_{\text{Gemini}} = \frac{1}{2} \cdot 3{,}8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot (0{,}3 \text{ m/s})^2 = 171 \text{ J} \\ E_{\text{kin, GATV}} &= 0 \text{ J} \\ \Rightarrow E_{\text{kin, vorher}} &= 171 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\text{kin, Gespann}} &= \frac{1}{2} \cdot \left(3{,}8 \cdot 10^3 \text{ kg} + 1{,}9 \cdot 10^3 \text{ kg}\right) \cdot (0{,}2 \text{ m/s})^2 = 114 \text{ J} \\ \Rightarrow E_{\text{kin, nachher}} &= 114 \text{ J} \end{aligned}$$

Wir erkennen eindeutig, dass $E_{\text{kin, nachher}} < E_{\text{kin, vorher}}$. Dies ist ein scheinbarer Widerspruch zur Energieerhaltung. Beim inelastischen Stoß geht die Energie jedoch *nicht verloren*, sondern wird in andere Energieformen *umgewandelt*, wie beispielsweise die innere Energie U. Im Allgemeinen gilt das Prinzip der Energieerhaltung also weiterhin.

c) Stellen wir uns vor, Gemini VIII hätte sich mit 1 m/s genähert, so dass die Verriegelung versagt hätte. Gehen Sie von einem elastischen Stoß aus und berechnen Sie die Geschwindigkeiten.
Lösung:

Wir behalten die Koordinatenwahl aus Teilaufgabe a) bei und gehen von einem elastischen Stoß aus. In der Vorlesung wurde auch dieser Fall behandelt und wir finden für die beiden Geschwindigkeiten u_i nach dem missglückten Dockversuch:

$$u_{\text{Gemini}} = \frac{m_{\text{Gemini}} - m_{\text{GATV}}}{m_{\text{Gemini}} + m_{\text{GATV}}} \cdot v_{\text{Gemini}} = \frac{3{,}8\ \text{t} - 1{,}9\ \text{t}}{3{,}8\ \text{t} + 1{,}9\ \text{t}} \cdot 1\ \text{m/s} \approx 0{,}33\ \text{m/s}$$
$$u_{\text{GATV}} = \frac{2 \cdot m_{\text{Gemini}}}{m_{\text{Gemini}} + m_{\text{GATV}}} \cdot v_{\text{Gemini}} = \frac{2 \cdot 3{,}8\ \text{t}}{3{,}8\ \text{t} + 1{,}9\ \text{t}} \cdot 1\ \text{m/s} \approx 1{,}33\ \text{m/s}$$

Aufgabe 2

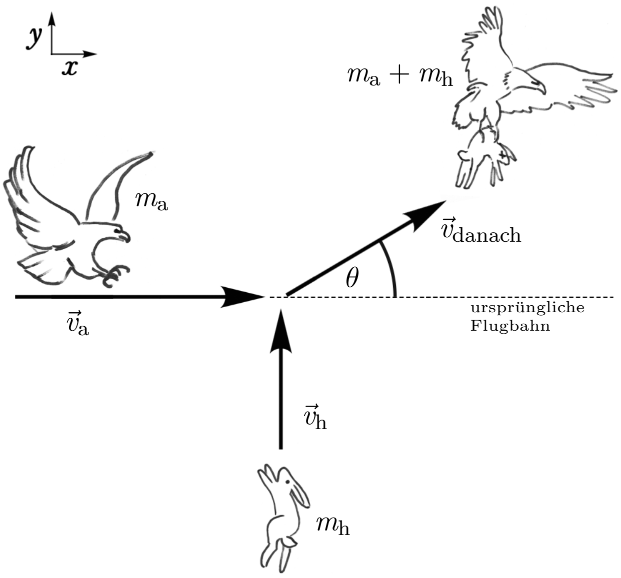

Abbildung 1: Skizze des Beutefangs, Draufsicht. Tierbilder symbolisch.

Steinadler und Schneehase. In freier Wildbahn war es möglich, einen Steinadler bei der Jagd auf einen Schneehasen aus mehreren Blickwinkeln zu filmen. Der Adler packte den genau senkrecht zur Flugbahn laufenden Hasen und flog mit diesem zunächst annähernd waagerecht weiter. Aus den Videoaufnahmen ließen sich die Geschwindigkeit des Adlers $\vec{v}_a$ und des Hasen $\vec{v}_h$ vor, und die Richtung der Geschwindigkeit des Adlers mit dem Hasen $\vec{v}_{danach}$ nach dem Jagderfolg bestimmen. Der Adler wurde dabei um den Winkel θ von seiner Flugbahn abgelenkt. Die Masse des Beutetieres m_h war vorher bekannt. Wir wollen damit die Masse des Adlers bestimmen, indem wir beide als Punktmassen annähern und eventuelle Flugmanöver des Adlers vernachlässigen.

a) Stellen sie eine Vektorgleichung für die Impulse dieser Situation auf. Orientieren Sie sich an der Skizze in Abbildung 1.
Lösung:

Anhand der Situation erkennen wir einen inelastischen Stoß, da Hase und Adler nach der Interaktion miteinander verbunden sind. Mit Hilfe der Impulserhaltung, welche auch vektoriell gültig ist, können wir die Summe der Impulse vor und nach dem Jagderfolg gleichsetzen und finden

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\mathrm{a}} + \vec{p}_{\mathrm{h}} &= \vec{p}_{\mathrm{danach}} \\ m_{\mathrm{a}} \vec{v}_{\mathrm{a}} + m_{\mathrm{h}} \vec{v}_{\mathrm{h}} &= (m_{\mathrm{a}} + m_{\mathrm{h}})\, \vec{v}_{\mathrm{danach}} \end{aligned}$$

b) Finden Sie einen Ausdruck für die Masse des Steinadlers m_{a}, wenn der Betrag $|\vec{v}_{\mathrm{danach}}|$ zunächst unbekannt, aber θ bekannt ist.
Tipp: Stellen Sie Gleichungen für die Imuplserhaltung in x und y auf, die den Betrag $|\vec{v}_{\mathrm{danach}}|$ und den Winkel θ (in geeigneten trigonometrischen Funktionen) beinhalten. Eliminieren Sie $|\vec{v}_{\mathrm{danach}}|$ mit den Gleichungen der x- und y-Komponenten.
Lösung:

Für die Koordinatenwahl wie in der Skizze vorgegeben ergeben sich, weil wir $\vec{v}_{\mathrm{danach}}$ schreiben können als

$$\vec{v}_{\mathrm{danach}} = |\vec{v}_{\mathrm{danach}}| \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},$$

für die x- und y-Komponenten dabei folgende Gleichungen

$$m_{\mathrm{a}}\, |\vec{v}_{\mathrm{a}}| + 0 = (m_{\mathrm{a}} + m_{\mathrm{h}}) \cdot |\vec{v}_{\mathrm{danach}}| \cdot \cos\theta \tag{1}$$
$$0 + m_{\mathrm{h}}\, |\vec{v}_{\mathrm{h}}| = (m_{\mathrm{a}} + m_{\mathrm{h}}) \cdot |\vec{v}_{\mathrm{danach}}| \cdot \sin\theta \tag{2}$$

Um $|\vec{v}_{\mathrm{danach}}|$ zu eliminieren, teilen wir die Gleichung der x-Komponenten durch die Gleichung der y-Komponenten und erhalten, wenn wir dabei anwenden, dass ${}^{\sin\theta}/_{\cos\theta} = \tan\theta$:

$$\frac{m_{\mathrm{a}}\, |\vec{v}_{\mathrm{a}}|}{m_{\mathrm{h}}\, |\vec{v}_{\mathrm{h}}|} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$

Diese stellen wir nach m_{a} um und finden schließlich einen Asudruck für die Masse des Adlers:

$$m_{\mathrm{a}} = \frac{m_{\mathrm{h}}\, |\vec{v}_{\mathrm{h}}|}{|\vec{v}_{\mathrm{a}}|} \cdot \frac{1}{\tan\theta}$$

Eine kurze Plausibilitätsprüfung für einen gefundenen Ausdruck ist immer hilfreich. Wir wollen zur Überprüfung zwei Extremfälle betrachten, wenn wir von gegebenen Geschwindigkeiten aber verschiedenem Winkel θ ausgehen. Diese Überprüfung können Sie auch für die Geschwindigkeiten selbst durchführen.

(a) θ sehr klein
Für θ sehr klein ist auch $\tan\theta$ sehr klein. Damit wird ${}^{1}/_{\tan\theta}$ sehr groß, wodurch m_{a} ebenfalls groß wird. Ist dies sinnvoll?
Ja. Wenn der Adler eine sehr große Masse hätte, würde er kaum abgelenkt werden.

(b) θ fast 90°
Für θ fast 90° ist $\tan\theta$ sehr groß, damit wird ${}^{1}/_{\tan\theta}$ sehr klein, wodurch m_{a} ebenfalls sehr klein wird. Ist dies sinnvoll?
Ja. Wenn der Adler vom Hasen so extrem abgelenkt werden würde, müsste er selbst sehr leicht sein. Auch dieses Ergebnis ist sinnvoll.

c) Berechnen Sie m_a für $m_\mathrm{h} = 3{,}0$ kg, $v_\mathrm{h} = 30$ km/h, $v_\mathrm{a} = 80$ km/h und $\theta = 11°$
Lösung:

Wir setzen die gegebenen Größen ein:

$$m_\mathrm{a} = \frac{m_\mathrm{h}\,|\vec{v}_\mathrm{h}|}{|\vec{v}_\mathrm{a}|} \cdot \frac{1}{\tan\theta} = \frac{3{,}0\text{ kg} \cdot 30\text{ km/h}}{80\text{ km/h}} \cdot \frac{1}{\tan(11°)} \approx 5{,}8\text{ kg}$$

Aufgabe 3

Die Geminiden. In der Zeit zwischen dem 4. Dezember und dem 17. Dezember können (gutes Wetter vorausgesetzt!) in den Nächten ungewöhnlich viele Sternschnuppen gesehen werden, die meisten dabei im Zeitraum um den 14. Dezember. Unter dunklem Himmel, fern ab der Großstadt, können Sie bis zu 120 Sternschnuppen pro Stunde sehen. Ursprung dieser Staubteilchen, die in unsere Atmosphäre eintreten und dabei beeindruckende Leuchterscheinungen am Himmel hervorrufen, ist ein Asteroid, welcher wie die Planeten die Sonne umkreist und vermutlich durch eine Kollision dieses Material verloren hat. Die Staubteilchen befinden sich auf einer ähnlichen Umlaufbahn wie der Asteroid.
Betrachten wir den Asteroiden und die Sonne als isoliertes System, können wir die Gesamtenergie in diesem System schreiben als

$$E_\mathrm{ges} = E_\mathrm{kin} + E_\mathrm{pot} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = const.$$

a) Berechnen Sie die Größe E_ges/m für den Asteroiden, wenn er in seiner maximalen Entfernung zur Sonne von 2,40 AE eine Geschwindigkeit von 6,44 km/s besitzt.
Hinweis: $M_\mathrm{Sonne} = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg; $G = 6{,}67408 \cdot 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2} ; 1 AE $= 1{,}495979 \cdot 10^{11}$ m (AE = Astronomische Einheit, Abstand Erde-Sonne)
Lösung:

Wir berechnen E_ges/m:

$$\frac{E_\mathrm{ges}}{m} = \frac{E_\mathrm{kin}}{m} + \frac{E_\mathrm{pot}}{m} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r}$$

Für die gegebenen Größen findet man

$$\frac{E_\mathrm{ges}}{m} = \frac{\left(6{,}44 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2} - \frac{6{,}67408 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{2{,}40 \cdot 1{,}495979 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}} \approx -349 \cdot 10^6\ \mathrm{J/kg}$$

Sie kennen den Energieerhaltungssatz der Mechanik $\Delta E_\mathrm{ges} = \Delta E_\mathrm{kin} + \Delta E_\mathrm{pot} = 0$. Damit folgt auch die Konstanz von E_ges, genau wie in der Aufgabe gegeben: Die Energie bleibt erhalten. Auch der Ausdruck E_ges/m ist konstant und ändert sich für den Asteroiden bei seinem Umlauf um die Sonne nicht.
Für Interessierte: Ist $E_\mathrm{ges} < 0$, also negativ, handelt es sich um eine gebundene Bewegung. Der Körper wird nie aus dem Gravitationsfeld entkommen. Ist $E_\mathrm{ges} \geq 0$, wird der Körper sich immer weiter von seinem Zentralkörper entfernen und nie wieder zurückkehren.

b) Leiten Sie einen Ausdruck für v her. Benutzen Sie $\frac{GMm}{2E_\mathrm{ges}} = -a$ um Ihren gefundenen Ausdruck umzuschreiben; a ist hier die große Halbachse der Umlaufbahn. Wie groß ist a für diesen Asteroiden?
Hinweis: a ist in diesem Fall keine Beschleunigung. Machen Sie den Einheitencheck.
Tipp: Stellen sie die gegebene Gleichung nach v um und versuchen sie durch geschicktes Umformen unter der Wurzel, einen Ausdruck für $1/a$ zu erreichen.

Lösung:
Um einen Ausdruck für v herzuleiten, stellen wir die gegebene Gleichung nach v um und finden vorerst

$$v = \sqrt{2\left(\frac{E_\text{ges}}{m} + \frac{GM}{r}\right)}$$

Um einen Ausdruck $\frac{GMm}{2E_\text{ges}}$ zu erreichen, klammern wir unter der Wurzel GM aus und multiplizieren die Klammer mit 2 aus. Wir finden

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2E_\text{ges}}{GMm} + \frac{2}{r}\right)}$$

und identifizieren $\frac{2E_\text{ges}}{GMm} = -\frac{1}{a}$, damit folgt

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \tag{3}$$

Dies ist die **momentane Bahngeschwindigkeit** v eines Körpers auf einer Keplerbahn (Ellipse) im Gravitationsfeld eines Zentralkörpers der Masse M im momentanen Abstand r. Hierbei ist a die *große Halbachse* der Keplerbahn des umlaufenden Körpers.

Für die große Halbachse a setzen wir die vorher berechnete Größe E_ges/m ein:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{GMm}{2E_\text{ges}} = -\frac{GM}{2} \cdot \left(\frac{E_\text{ges}}{m}\right)^{-1} \\ &= -\frac{6{,}67408 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\,\text{s}^2} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{2} \cdot \frac{1}{-349 \cdot 10^6\ \text{J/kg}} \approx 1{,}90 \cdot 10^{11}\ \text{m} \approx 1{,}27\ \text{AE} \end{aligned}$$

Für Interessierte: Auf einer *Kreisbahn* ist die große Halbachse gleich dem Radius. Damit ergibt sich für die Bahngeschwindigkeit in einem stabilen kreisförmigen Orbit der gleiche Ausdruck, den wir mit dem Ansatz $F_\text{Z} = F_\text{G}$ finden würden, nämlich:

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r}\right)} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Für Interessierte: Lassen wir die große Halbachse a der Ellipse gegen unendlich gehen, würde uns der Ausdruck die Geschwindigkeit für einen Körper im Abstand r liefern, die er benötigt, um sich auch unendlich weit zu entfernen. Auch dieser Ausdruck ist uns bekannt, welchen wir ebenfalls aus dem Gleichsetzen der potentiellen Energie und der kinetischen Energie $E_\text{kin} = E_\text{pot}$ erhalten würden, nämlich die **Fluchtgeschwindigkeit** für einen Körper im Abstand r zu einem Körper der Masse M:

$$v_\text{F} = \lim_{a\to\infty} \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Für eine Keplerumlaufbahn gilt: In einem der Brennpunkte steht die Sonne, während ein Körper auf der Ellipse seine Bahnen zieht. Die Verbindungslinie vom sonnennächsten Punkt auf der Umlaufbahn (Perihel) zum sonnenfernsten Punkt auf der Umlaufbahn (Aphel), entspricht genau $2a$. Die Große Halbachse lässt sich also auch geometrisch begründet berechnen mit

$$a = \frac{r_\text{Perihel} + r_\text{Aphel}}{2}$$

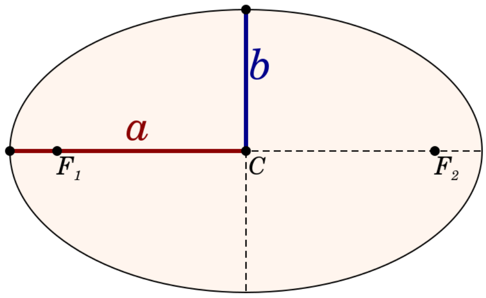

Abbildung 2: Größen in einer Ellipse mit den beiden Brennpunkten F_1 und F_2, dem Mittelpunkt C, der kleinen Halbachse b und der großen Halbachse a.

c) Wie schnell ist er, wenn er im Abstand von 0,14 AE der Sonne am nächsten ist? Vergleichen Sie die Geschwindigkeit mit der Geschwindigkeit in 2,4 AE Entfernung: Welches Keplersche Gesetz finden sie hier wieder?
Lösung:

Wir berechnen mit dem vorher gefundenen Ausdruck die Geschwindigkeit für $r = 0{,}14$ AE:

$$v = \sqrt{6{,}67408 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg} \cdot \left(\frac{2}{0{,}14\ \mathrm{AE}} - \frac{1}{1{,}27\ \mathrm{AE}}\right)} \approx 109\ \mathrm{km/s}$$

Der Asteroid ist im geringeren Abstand zur Sonne deutlich schneller. Dies spiegelt sich auch im II. Keplerschen Gesetz wider:

> Die von der Sonne zum Planeten gezogene Strecke überstreicht in gleichen Zeitintervallen gleiche Flächeninhalte.

Wenn sich der Asteroid näher an der Sonne befindet, muss er schneller sein, damit die Verbindungslinie in der gleichen Zeit die gleiche Fläche überstreicht.

d) Die Staubteilchen, welche Sternschnuppen verursachen, haben typischerweise eine Masse zwischen 2 mg und 2 g. Die der Geminiden treten mit etwa 35 km/s in die Atmosphäre der Erde ein. Berechnen Sie die kinetische Energie, welche ein 1 g schweres Teilchen mit 35 km/s besitzt. Finden Sie einen Alltagsvergleich (bspw. ein Auto) mit derselben kinetischen Energie.
Lösung:

Die kinetische Energie berechnen wir mit dem uns bekannten Ausdruck

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}\ \cdot \left(35 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}\right)^2 = 613\ \mathrm{kJ}$$

Viele Vergleiche sind möglich, auch mit einem LKW oder einem Zug. Die Herangehensweise ändert sich dabei nicht. Wenn wir diese Energie mit einem Kleinwagen der Masse $m_{\mathrm{Auto}} = 900$ kg vergleichen wollen, können wir bestimmen, wie schnell er fahren muss, um dieselbe kinetische Energie zu besitzen. Wir setzen die beiden Energien $E_{\mathrm{kin,\ Staubteilchen}}$ und $E_{\mathrm{kin,\ Auto}}$ gleich und lösen nach der Geschwindigkeit des Autos v_{Auto} auf.

$$
\begin{aligned}
E_{\text{kin, Auto}} &= E_{\text{kin, Staubteilchen}} \\
\frac{1}{2} \cdot m_{\text{Auto}} \cdot v_{\text{Auto}}^2 &= E_{\text{kin, Staubteilchen}} \\
v_{\text{Auto}} &= \sqrt{\frac{2 \cdot E_{\text{kin, Staubteilchen}}}{m_{\text{Auto}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 613\ \text{kJ}}{900\ \text{kg}}} \approx 36{,}9\ \text{m/s} \approx 133\ \text{km/h}
\end{aligned}
$$

Andere Beispiele und deren benötigte Geschwindigkeit, um die gleiche kinetische Energie einer Sternschnuppe zu erreichen:

Objekt	typ. Masse	typ. Geschwindigkeit	**benötigte Geschwindigkeit**
9 mm Projektil	7,5 g	400 m/s	**12,8 km/s**
Golfball	45 g	70 m/s	**5,2 km/s**
Tennisball	58 g	15 bis 70 m/s	**4,6 km/s**
8 Pfünder Kanonenkugel	3,6 kg	500 bis 1000 m/s	**580 m/s**
Moped (+Fahrer)	150 kg	50 km/h	**325 km/h**
Kleinwagen	900 kg	120 km/h	**133 km/h**
Kleintransporter	2,5 t	100 km/h	**80 km/h**
LKW	7,5 t	80 km/h	**46 km/h**
Düsenjet	14 t	2000 km/h	**34 km/h**
ICE 3	437 t	300 km/h	**6 km/h**
Güterzug	4000 t	90 km/h	**2 km/h**
Bagger 288	13500 t	0,3 km/h	**1 km/h**