Übungsblatt 7
Besprechung am 12.12.2017/14.12.2017

Aufgabe 1

Raketentechnik: Raketenantriebe funktionieren nach dem Rückstoßprinzip: Der Treibstoff wird verbrannt und mit einer möglichst hohen Geschwindigkeit ausgestoßen. Gemäß der Impulserhaltung wird die Rakete damit in die entgegengesetzte Richtung beschleunigt.
SpaceX ist ein privates US-amerikanisches Raumfahrtunternehmen, das seit 2008 Raketen ins Weltall schickt. Im Gegensatz zu anderen Ansätzen in der Raumfahrt, verfolgt SpaceX die Strategie, genutzte Raketenstufen zu landen und wiederzuverwerten. Dies gelang 2015 das erste Mal mit einer Trägerrakete des Typs Falcon 9.
Die Falcon 9 benötigt für das Erreichen der Erdumlaufbahn etwa 3 Minuten und hat eine Startmasse von 541 t. Nehmen wir an, davon wären 500 t Treibstoff und es würden jeweils die Hälfte davon für Start und Landung gleichmäßig verbrannt werden.

a) Berechne den Schub T, den die Trägerrakete erzeugt, wenn der Treibstoff mit einer Geschwindigkeit von $v = 5500\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ausströmt.
Tipp: Der Schub berechnet sich über $T = R \cdot v$. Dabei ist R die Verbrennungsrate, die angibt, wie viele kg Treibstoff pro Sekunde verbrannt werden.

Lösung:

Für die Verbrennungsrate R ergibt sich bei gleichmäßigem Ausströmen des Treibstoffs:

$$R = \frac{m_{\text{Treibstoff}}/2}{t_{\text{Start}}} = \frac{500\ \text{t}/2}{3\text{min}} \approx 1389\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Damit erhält man für den Schub T:

$$T = R \cdot v \approx 7.64\ \text{MN}$$

b) Berechne die Beschleunigung unmittelbar nach dem Start. Unter Vernachlässigung der Schwerkraft, was ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt, an dem der Treibstoff für den Hinweg aufgebraucht ist?

Lösung:

Der Schub ist eine Kraft, wir können also wie gewohnt mit der Formel $F = m \cdot a$ rechnen. Dann folgt für die Beschleunigung beim Start:

$$a_{\text{Start}} = \frac{T}{m_{\text{Start}}} \approx \frac{7.64\ \text{MN}}{541\ \text{t}} \approx 14,12\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

was größer als die Erdbeschleunigung ist, der Rakete gelingt also das Abheben. Setzt man die gegebenen Informationen in die Raketengleichung ein, so erhält man die Endgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} v_{\text{Rakete}} &= v \cdot \ln\left(\frac{m_{\text{Start}}}{m_{\text{Ende}}}\right) = v \cdot \ln\left(\frac{m_{\text{Start}}}{m_{\text{Start}} - \frac{m_{\text{Treibstoff}}}{2}}\right) \\ &= 5500\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \ln\left(\frac{541\ \text{t}}{541\ \text{t} - \frac{500\ \text{t}}{2}}\right) \approx 3,41\ \frac{\text{km}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Pizza: Ein Pizzabäcker hat einen 500 g schweren, kugelförmigen Pizzateig vorbereitet.

a) Um aus der Kugel mit Durchmesser 10 cm eine schöne Pizza zu formen, beginnt der Bäcker, die Kugel auf seinem Finger zu drehen. Welches Trägheitsmoment hat die Pizzakugel?

Lösung:

Das Trägheitsmoment einer Kugel beträgt $J = \frac{2}{5}MR^2$. In unserem Fall gilt also:

$$J = \frac{2}{5} \cdot 500\ \text{g} \cdot (5\ \text{cm})^2 = 0.0005\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

b) Er benötigt eine Winkelgeschwindigkeit von $\omega = 5$ rad$\cdot$s^{-1}, damit die Kugel flach wird. Wie viel Energie muss er in die Pizzakugel stecken?

Lösung:

Die Rotationsenergie eines Körpers beträgt $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}J\omega^2$. Damit die Pizza flach wird, muss also

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \cdot 0,0005\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot (5\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1})^2 = 0,00625\ \text{J}$$

sein.

c) Sein Kollege möchte die Pizza nicht selbst drehen und hat sich dafür einen Drehteller (zylinderförmig, Masse 2 kg, Durchmesser 40 cm) besorgt, auf dem er die Kugel mittig platziert. Dieser wird betrieben, indem man ein Gewicht fallen lässt, welches über ein Seil den Teller in Rotation versetzt (s. Skizze). Welche Masse muss er an das Seil hängen, damit die Kugel bei einer Tischhöhe von 1 m flach wird?

Lösung:

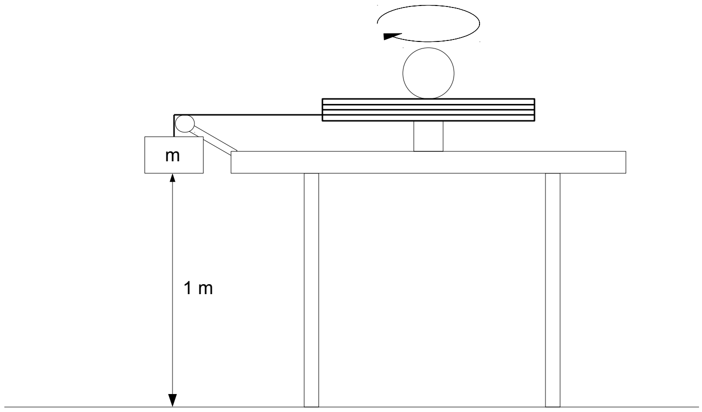

Abbildung 1: Aufgabe 2 - Pizza: Der Tisch mit Rotationsteller.

Um die Aufgabe zu lösen, nutzen wir Energieerhaltung. Es gilt hier:

$$
\begin{aligned}
E_{\text{pot}} &= E_{\text{kin}} + E_{\text{rot,Teller}} + E_{\text{rot,Kugel}} \\
m \cdot g \cdot h &= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_{\text{Teller}} \omega^2 + E_{\text{rot,Kugel}} \qquad \text{mit } J_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{2} M R^2 \\
m \left(g \cdot h - \frac{1}{2} v^2 \right) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_{\text{Teller}} r_{\text{Teller}}^2 \omega^2 + E_{\text{rot,Kugel}} \\
m &= \frac{\frac{1}{4} m_{\text{Teller}} r_{\text{Teller}}^2 \omega^2 + E_{\text{rot,Kugel}}}{g \cdot h - \frac{1}{2} v^2} \qquad \text{mit } v = \omega \cdot r \\
&= \frac{\frac{1}{4} m_{\text{Teller}} r_{\text{Teller}}^2 \omega^2 + E_{\text{rot,Kugel}}}{g \cdot h - \frac{1}{2} \omega^2 r_{\text{Teller}}^2} \\
&\approx 0{,}054 \text{ kg}
\end{aligned}
$$

d) In flachem Zustand hat die Pizza einen Durchmesser von 35 cm. Wie groß ist jetzt das Trägheitsmoment der Pizza?

Lösung:

Wieder unter Nutzung von $J_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{2} M R^2$ finden wir:

$$J_{\text{Pizza}} = \frac{1}{2} \cdot \; 500 \text{ g} \cdot (17{,}5 \text{ cm})^2 \approx 0.00766 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

was also deutlich größer als für die Kugelform ist.

e) Nun legt der Pizzabäcker Salamischeiben mit einer Masse von jeweils 10 g und Radius 2 cm auf die Pizza. Dabei platziert er eine Scheibe bei einem Radius von

5 cm (Abstand Mittelpunkt Pizza - Mittelpunkt Salamischeibe) und eine weitere bei 12 cm. Wie groß ist nun das Trägheitsmoment der Pizza?

Lösung:

Zunächst bestimmen wir das Trägheitsmoment einer Salamischeibe bei Rotation um die Symmetrieachse:

$$J_{\text{Salami}} = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ g} \cdot (2 \text{ cm})^2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Dann benutzen wir den Steinerschen Satz, um das Trägheitsmoment der Salamischeiben bezüglich der Drehachse der Pizza zu bestimmen:

$$\begin{aligned} J_{\text{Salami, innen}} &= J_{\text{Salami}} + 10 \text{ g} \cdot (5 \text{ cm})^2 = 0.27 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ J_{\text{Salami, ausßen}} &= J_{\text{Salami}} + 10 \text{ g} \cdot (12 \text{ cm})^2 = 1.46 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis können wir jetzt verwenden, um das gesamte Trägheitsmoment der Pizza zu berechnen:

$$\begin{aligned} J_{\text{ges}} &= J_{\text{Pizza}} + J_{\text{Salami, innen}} + J_{\text{Salami, außen}} \\ &\approx 0.00783 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Stromausfall: Der Supercomputer SuperMUC, der im Leibnitz Rechenzentrum in München steht, nimmt eine Leistung von 3500 kW auf. Fällt der Strom aus, muss eine Zeit von $\Delta t = 10$ s bis zum Anlaufen des Notstromgenerators überbrückt werden.

a) Wie viele Energiesparlampen (Leistung 11 W) könnte man mit der Energie, die für die Überbrückung der 10 s nötig sind, einen Tag brennen lassen?

Lösung:

Die Energie E_S, die SuperMUC in den 10 s verwenden würde, beträgt

$$E_S = P \cdot \Delta t = 3500 \text{ kW} \cdot 10 \text{ s} = 3,5 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

Die Energie E_E, die eine Energiesparlampe pro Tag verwendet, ist

$$E_E = 11 \text{ W} \cdot (3600 \cdot 24) \text{ s} \approx 9.5 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

Daraus ergibt sich die Anzahl der Energiesparlampen n als

$$n = \frac{E_S}{E_E} \approx \frac{3,5 \cdot 10^7 \text{ J}}{9.5 \cdot 10^5 \text{ J}} \approx 36,8$$

Man könnte also 36 Energiesparlampen einen ganzen Tag lang brennen lassen.

b) Wie viele Liter Wasser könnte man mit dieser Energie um 1° C erhitzen?
Tipp: Wie ist die Einheit Kalorie definiert?

Lösung:

Eine Kalorie ist die Energie, die benötigt wird um 1 g reines Wasser von 14,5° C auf 15,5° C unter Normaldruck zu erhitzen. Außerdem gilt: 1 cal $= 4,1855$ J. (Dieser Wert kann je nach gewählter Definition variieren.) Damit folgt

$$E_S = 3,5 \cdot 10^7 \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ cal}}{4,1855 \text{J}} \approx 8,362 \cdot 10^6 \text{ cal}$$

Die Energie reicht also aus um $8,362 \cdot 10^6$ g $= 8,362 \cdot 10^3$ kg Wasser zu erhitzen. Die Dichte von Wasser ist $\rho \approx 1000$ kg·m^{-3}. Damit entspricht dies 8362 Litern Wasser.

c) Um die Zeit zu überbrücken, bis der Generator läuft, verwendet man eine zylindrische Schwungscheibe aus Stahl mit Radius r=1,2 m und der Masse $m = 1000$ kg. Auf wie viele Umdrehungen pro Minute muss die Scheibe beschleunigt werden, damit sie genügend Energie speichert, um die Zeit zu überbrücken?

Lösung: Die Rotationsenergie der Schwungscheibe E_{rot} muss der Energie E_S, die SuperMUC benötigt, entsprechen:

$$\begin{aligned} E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J\omega^2 &\overset{!}{=} E_S \\ \omega &= \sqrt{\frac{2E_S}{J}} \\ &= \sqrt{\frac{2E_S}{\frac{1}{2}mr^2}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 3,5 \cdot 10^7 \text{ J}}{\frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot (1,2 \text{ m})^2}} \\ &\approx 311,8 \; \frac{\text{rad}}{s} \end{aligned}$$

Mit $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 49,63 \text{ s}^{-1}$ folgt dann, dass das Rad auf $49,63 \cdot 60$ rpm ≈ 2978 rpm beschleunigt werden muss.