Lösungen zu Übungsblatt 8

Aufgabe 1

Clown-Wippe. Zur Unterhaltung seiner Zuschauer will Krusty der Clown ($m_K = 100$ kg) mit seinen zwei Assistenten Bob ($m_B = 75$ kg) und Mel ($m_M = 60$ kg) auf einer 10 Meter langen Wippe mit Auflagepunkt in der Mitte hin und her wippen. Krusty und Bob sitzen jeweils am äußersten Ende einer der beiden Seiten der Wippe.

a) In welchen Abstand zur Drehachse muss Mel sitzen, damit beide Seiten im Gleichgewicht sind?

Lösung:

Für das Drehmoment T gilt allgemein

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Die einzelnen Drehmomente lassen sich betragsmäßig ausdrücken durch

$$|\vec{T}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin(\alpha) = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}|$$

da die Gewichtskraft senkrecht zu den Ortsvektoren wirkt. im Gleichgewichtszustand gilt

$$T_{links} = T_{rechts}$$

Fasst man die oberen Überlegungen zusammen ergibt sich für die Clown-Wippe als Gleichgewichtsbedingung

$$\begin{aligned} T_K &= T_B + T_M \\ m_K \cdot g \cdot r_K &= m_B \cdot g \cdot r_B + m_M \cdot g \cdot r_M \end{aligned}$$

Auflösen nach r_M ergibt

$$\begin{aligned} r_M = \frac{m_K \cdot g \cdot r_K - m_B \cdot g \cdot r_B}{m_M \cdot g} &= \frac{(m_K - m_B) \cdot r_K}{m_M} \\ &= \frac{(100\,\mathrm{kg} - 75\,\mathrm{kg}) \cdot\ 5,0\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{kg}} = 2,08\bar{3}\,\mathrm{m} \approx 2,1\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

b) Leider hat Krusty sich in letzter Zeit etwas gehen lassen und 10 Kilogramm zugenommen. Berechnen Sie die neue Position von Mel, damit die Wippe weiterhin im Gleichgewicht bleibt.

Lösung:

Die einzige Veränderung im Vergleich zu Teilaufgabe a) ist die Masse von Krusty m_K setzt man die Veränderung ein so erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{r}_M = \frac{\tilde{m}_K \cdot g \cdot r_K - m_B \cdot g \cdot r_B}{m_M \cdot g} &= \frac{(\tilde{m}_K - m_B) \cdot r_K}{m_M} \\ &= \frac{(110\,\mathrm{kg} - 75\,\mathrm{kg}) \cdot 5,0\,\mathrm{m}}{60\mathrm{kg}} = 2,91\bar{6}, \mathrm{m} \approx 2,9\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

c) Da Bob ein Verbrechen begangen hat, muss dieser ins Gefängnis. Wie lang müsste die Wippe auf Mels Seite sein, damit zwischen Krusty und Mel ein Gleichgewicht entsteht?
Lösung:
Durch den Wegfall von Bob ändert sich das Drehmoment der rechten Seite und als Gleichgewichtsbedingung erhält man

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{links} &= \tilde{T}_{rechts} \\ \tilde{m}_K \cdot g \cdot r_K &= m_M \cdot g \cdot \tilde{r}_M,\end{aligned}$$

Umformen nach $\tilde{r_M}$

$$\tilde{r}_M = \frac{\tilde{m}_K \cdot r_K}{m_M} = \frac{110\,\text{kg} \cdot 5,0\,\text{m}}{60\,\text{kg}} = 9,1\bar{6}\,\text{m} \approx 9,2\,\text{m}$$

Aufgabe 2

Eisläuferin. Eine 1,60 Meter große und 50 Kilogramm schwere Eisläuferin macht auf der Eisfläche eine Pirouette mit parallel zum Boden ausgebreiteten Armen, dabei dreht sie sich zwei mal pro Sekunde um ihre eigene Achse.

Abbildung 1: Rotierende Eisläuferin mit ausgestreckten und angezogenen Armen

a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment I der Eisläuferin.
Nehmen Sie dazu an, dass der Körper der Eisläuferin zylinderförmig ist mit Durchmesser d = 25 cm. 90 % des Körpergewichts der Eisläuferin sind homogen in ihrem Körper verteilt. Die restlichen 10 % fallen auf die Arme und können durch zwei gleich schwere Punktmassen im Abstand a = 50 cm zur Rotationsachse genähert werden.
Lösung:
Höhe des Zylinders $h = 1,60\,\text{m}$, Masse der Eisläuferin $m_{Gesamt} = 50\,\text{kg}$, Körperradius $r_K = 0,125\,\text{m}$, Armabstand $r_A = 0,5\,\text{m}$

Trägheitsmoment bei Pirouette mit ausgestreckten Armen:

$$I_{Gesamt} = I_{\text{Körper}} + I_{Arme}$$

Der Körper wird als zylindrisch angenommen wird ($I = \frac{1}{2} m_K {r_K}^2$) und das Trägheitsmoment der Punktmassen ($I_A = m_A {r_A}^2$) addiert.
$m_K = 0,9 m_{Gesamt}$, $m_A = 0,1 m_{Gesamt}$

$$I_{Gesamt} = \frac{1}{2} m_K {r_K}^2 + \cdot m_A {r_A}^2 = \frac{1}{2} \cdot 45\,\text{kg} \cdot (0,125\,\text{m})^2 + \cdot 5\,\text{kg} \cdot (0,5\,\text{m})^2 = 1,60\,\text{kg}\,\text{m}^2$$

b) Die Eisläuferin legt nun ihre Arme an ihren Körper an. Dadurch verkleinert sich der Abstand der Punktmassen auf $\tilde{a} = 25$ cm. Berechnen Sie das neue Trägheitsmoment Ĩ der Eisläuferin.
Lösung:

$\tilde{r_A} = 0{,}25$ m

$$I_{Gesamt} = \frac{1}{2} m_K {r_K}^2 + \cdot m_A \tilde{r_A}^2 = \frac{1}{2} \cdot 45\,\text{kg} \cdot (0,125\,\text{m})^2 + \cdot 5\,\text{kg} \cdot (0,25\,\text{m})^2 = 0.66\,\text{kg}\,\text{m}^2$$

c) Bestimmen Sie die neue Pirouettenfrequenz.

Lösung:

$f = 2,0 Hz$. Drehimpulserhaltung $L = \tilde{L}$ mit $L = I \cdot \omega$ und $\omega = 2\pi f$ führt zu:

$$\tilde{\omega} = \frac{I\omega}{\tilde{I}} => \tilde{f} = \frac{If}{\tilde{I}} = \frac{1.60\,\text{kg}\,\text{m}^2 \cdot 2,0\;Hz}{0,66\;kg\,\text{m}^2} = 4,8\,\text{Hz}$$

Aufgabe 3

Fisch. Die meisten Fische nutzen eine mit Gas befüllbare Schwimmblase zur Variation ihres Volumens um unter Wasser ohne Flossenbewegung auf konstanter Tiefe bleiben zu können.

a) Welche Kräfte sind im Schwebezustand der Fische im Gleichgewicht?
Lösung:
Gewicht des verdrängten Wasservolumens bestimmt die zu F_G entgegengerichtete Auftriebskraft (statischer Auftrieb/Archimedes)

$$F_{Gewicht} = F_{Auftrieb}$$

b) Ein 90 Zentimeter langer und 5,0 Kilogramm schwerer Hecht will direkt unter der Wasseroberfläche im 25°C warmen Wasser allein durch Auftrieb seine Tauchtiefe halten. Welches Volumen benötigt der Hecht dazu?
Die Dichte von Wasser bei 25°C beträgt $997,048\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Lösung:

$$\begin{aligned} F_G &= F_A \\ m_{Hecht} \cdot g &= \rho_{Wasser} \cdot V_{Hecht} \cdot g \\ V_{Hecht} &= \frac{m_{Hecht}}{\rho_{Wasser}} = \frac{5,0\,\mathrm{kg}}{997,048\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} = 5,015 \cdot 10^{-3}\,m^3 \end{aligned}$$

c) Zur Beutejagd taucht der Hecht auf eine Schwimmtiefe von 10 Metern. Die Wassertemperatur beträgt in dieser Tiefe nur noch 5°C. Welches Volumen muss der Hecht annehmen, damit er bei den gegebenenn Bedingungen in 10 Metern Tiefe schweben kann?
Um wie viel Prozent ändert sich das Volumen des Hechtes?
Bei 5°C bertägt die Dichte von Wasser $999,967\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

Lösung:

Die Masse des Fisches bleibt diesselbe, die Dichte des Wassers wird etwas größer:

$$\tilde{V}_{Hecht} = \frac{5,0\,kg}{999,967\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} = 5,00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$$

Prozentuale Volumenänderung:
$\frac{V_{vorher}}{V_{nachher}} = \frac{5{,}015 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{5{,}00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3} = 1,003$
Der Hecht verkleinert sein Volumen also um 0,3 %

d) Wie groß ist der in der dieser Tiefe herrschende äußere Druck?

Lösung:
Der äußere Druck setzt sich aus Wasserdruck und Atmosphärendruck zusammen:

$$p_W = \frac{F}{A} = \frac{m_w \cdot g}{A} = \frac{\rho_W \cdot A \cdot h \cdot g}{A} = \rho_W \cdot h \cdot g = 980,96\,hPa$$

Damit gilt für den äußeren Druck:

$p = p_W + 1013,25\,hPa = 1994,12\,hPa$