Übungsblatt 9
Besprechung am 9.01.2018 / 10.01.2018

Aufgabe 1

Strömende Fluide und die Bernoulli-Gleichung
Gegeben sei ein Behälter mit Durchmesser D aus dem über ein Rohr mit Durchmesser d Wasser abläuft (siehe Skizze). Der Wasserstand H kann durch den Zufluss mit der Flussrate Q_1 reguliert werden. Betrachten Sie das Wasser als ideale Flüssigkeit.

a) Wie groß ist der statische Druck im Punkt 1?

Der Druck beträgt $p_1 = \rho \mathrm{gH}$

b) Mit welcher Geschwindigkeit strömt das Wasser im Punkt 2 mittig (d.h. bei einer Höhe von h + d/2) aus dem Rohr aus? Nehmen Sie dazu an, dass die Austrittsgeschwindigkeit über den gesamten Querschnitt konstant ist.

Der Druck bei Punkt 2 beträgt: $p_2 = \rho \mathrm{g} \left(\mathrm{H} - \mathrm{h} - \frac{\mathrm{d}}{2}\right)$ Damit können wir mithilfe der Bernoulli-Gleichung die Austrittsgeschwindigkeit berechnen: $p_2 = \frac{1}{2}\rho \mathrm{v}^2 \implies v = \sqrt{\frac{2\mathrm{p}_2}{\rho}}$
$\implies v = \sqrt{2\mathrm{g}\left(\mathrm{H} - \mathrm{h} - \frac{\mathrm{d}}{2}\right)}$

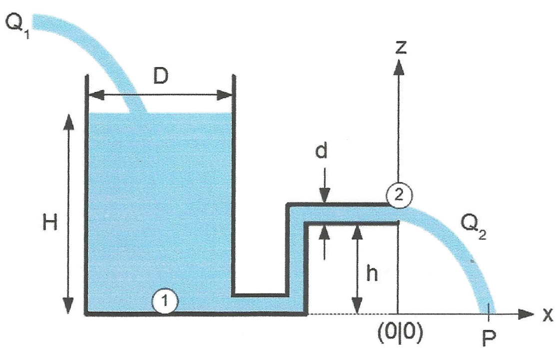
c) Wie groß muss die Zuflussrate Q_1 sein, damit sich der Wasserpegel im Behälter nicht ändert?

Die Zuflussrate Q_1 muss gleich der Abflussrate Q_2 sein. $Q_2 = A_2\mathrm{v} = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi \mathrm{v}$

d) An welchem Punkt auf der X-Achse des gezeigten Koordinatensystem trifft das Wasser auf, das mittig (also bei d/2) aus dem Rohr strömt.

Das Problem ist ein waagerechter Wurf mit Geschwindigkeit $v = \sqrt{2\mathrm{g}\left(\mathrm{H} - \mathrm{h} - \frac{\mathrm{d}}{2}\right)}$. Das Wasser tritt in einer Höhe von $h_0 = h + \frac{d}{2}$ aus, wir berechnen die Fallzeit aus $y = -\frac{1}{2}\mathrm{g}t^2 + h_0 \implies t = \sqrt{\frac{2\mathrm{h}_0}{\mathrm{g}}}$.

Die in dieser Zeit zurückgelegte Strecke in x-Richtung ist: $x = vt \implies x_P = 2\sqrt{\left(\mathrm{H} - \mathrm{h} - \frac{\mathrm{d}}{2}\right)\left(h + \frac{d}{2}\right)}$



Aufgabe 2

Zeppelin. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts war der Zeppelin ein modernes Transportmittel.

Wir betrachteten ein Luftschiff, das ungefähr zylinderförmig mit einer Länge von 120 m und einem Durchmesser von 60 m ist. Die Füllung besteht zunächst aus (gasförmigem) Wasserstoff (Dichte ρ_{H_2} = 0,08 kg/m^3).

a) Was ist Gesamtkraft auf den Zeppelin mit einer Wasserstofffüllung in der Umgebungsluft (Dichte $\rho_{Luft} = 1.2$ kg/m^3)? Was ist die daraus resultierende maximale Startmasse, d.h. die maximale Masse der Zeppelinkonstruktion, der Passagiere und der Nutzlast?

   Die Gesamtkraft besteht aus Auftriebskraft abzüglich Gewichtskraft und berechnet sich aus

   $F_{ges} = gV\,(\rho_{Luft} - \rho_{H_2})$.

   Das Volumen beträgt

   $V = A \cdot L = \pi(30\mathrm{m})^2 \cdot 120\mathrm{m} = 3.39 \cdot 10^5\mathrm{m}^3$.

   Damit erhalten wir für die Auftriebskraft mit $g = 9.81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$:

   $F_A = 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 3.39 \cdot 10^5\mathrm{m}^3 \left(1.2kg/m^3 - 0.08kg/m^3\right) = 3.7 \cdot 10^6 N$.

   Damit ist die maximale Nutzlast: $M_{Nutzlast} = F_A/g = 380t$.

b) Nach einem tragischen Unfall, bei dem ein mit Wasserstoff gefüllter Zeppelin in Flammen aufging, wurden Luftschiffe nur noch mit Helium gefüllt. Helium hat eine Dichte von ρ_{He}= 0,18 kg/m^3. Wie wirkt sich das auf die maximale Nutzlast aus?

   Die maximale Nutzlast verringert sich auf 346t. Der Auftrieb ist geringer:

   $F_A = 9.81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 3.39 \cdot 10^6\ \mathrm{m}^3 \left(1.2\ kg/m^3 - 0.18\ kg/m^3\right) = 3.39 \cdot 10^6 N$.

   Damit ist die maximale Nutzlast $M_{Nutzlast} = F_A/g = 346$ t.

c) Die Reisegeschwindigkeit des Zeppelins sei 100 km/h. Wie groß ist die Luftreibungskraft, die dabei überwunden werden muss? (Hinweis: Sie können die Formel der Newton Reibung benutzen; $C_\omega = 0,05$)

   100 km/h sind 27.78 m/s:

   $F = \frac{1}{2} \cdot \rho_{Luft} \cdot A \cdot C_\omega \cdot v^2 = 6.5 \cdot 10^4$ N

d) Was ist die Motorleistung, die nötig ist, um mit konstanter Geschwindigkeit von 100 km/h zu fliegen, wenn der Gesamtwirkungsgrad der Motoren und Propeller $\eta = 0,4$ beträgt?

   $P = F_{Reib} \cdot \mathrm{v} = 1.8 \cdot 10^6$ W

   $P_{Motor} = \frac{P}{\eta} = \frac{1.8}{0.4} \cdot 10^6\ \mathrm{W} = 4.5 \cdot 10^6$ W

Aufgabe 3

Bierleitung In der belgischen Stadt Brügge gibt es eine 3,2 km lange Bierleitung, die die Brauerei *De Halve Maan* in der Stadtmitte mit einer Abfüllanlage außerhalb der Stadt verbindet. Pro Jahr transportiert die Bierleitung 7 Millionen Liter Bier. Wir gehen davon aus, dass die Leitung kontinuierlich betrieben wird und aus einem durchgehenden Rohr mit einem runden Querschnitt mit einem Durchmesser von 5 cm besteht. Außerdem nehmen wir an, dass Bier in den ersten vier Teilaufgaben als ideales (inkompressibles und reibungsfreies) Fluid genähert werden kann und eine Dichte von 1050 kg/m^3 und den typischen Preis von Wiesenbier (10 Euro/l) hat.

a) Was ist die Volumenflussrate in der Leitung in l/s und in Euro/s?

$Q_l = \frac{7 \cdot 10^6 l}{1y} = 0.22 \frac{l}{s}$

$Q_{Euro} = \frac{7 \cdot 10^6 l}{1y} \cdot 10 \frac{Euro}{l} = 0.16 \frac{l}{s} \cdot 10 \frac{Euro}{l} = 2.22 \frac{Euro}{s}$

b) Was ist die Flussgeschwindigkeit in der Leitung (in m/s)?

$Q_l = A \cdot v \implies v = \frac{Q_1}{A} = 0.113 \ \frac{m}{s}$

c) Wir gehen davon aus, dass der Gesamtdruck in der Leitung auf "Straßenniveau" 10 bar beträgt. An ihrer tiefsten Stelle liegt die Leitung 34 m unterhalb des "Straßenniveaus". Was ist die Flussgeschwindigkeit an dieser Stelle? Was ist der statische Druck (d.h. der Druck ohne Stau- und Schweredruck) im Rohr an dieser Stelle?

Da das Fluid inkompressibel ist bleibt die Flussgeschwindigkeit konstant. Nach Bernoulli ist $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h$ innerhalb des Bieres konstant. Auf Strassenniveau gilt $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = p + \frac{1}{2}\rho v^2 = 10^6$ Pa Daraus folgt für den Druck am tiefsten Punkt: $p_t + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h_t = p + \frac{1}{2}\rho v^2 = 10^6 \text{ Pa} \implies p_t = p + \frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{1}{2}\rho v^2 - \rho g h_t = 10^6 \text{ Pa} - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 - \rho \cdot g \cdot h_t$
$p_t = 13.5 \cdot 10^5$ Pa

Anmerkung: als Höhe muss -34 m benutzt werden!

d) Studenten des in Brügge ansässigen "College of Europe" beschließen, für eine Party die Bierleitung auf Straßenniveau anzubohren. Wie hoch spritzt das austretende Bier?

Am höchsten Punkt hat das austretende Fluid nur potentielle Energie, also ist $p = 0$ und $v = 0$, daher ist $h_{max} \cdot \rho \cdot g = 10^6 \text{ Pa} \implies h_{max} = 97.1$ m

Nach einiger Betriebszeit der Leitung soll die Durchflussrate wegen der hohen Nachfrage verdoppelt werdem. Bei den Vorbereitungen für die Modernisierung ist den Ingenieuren aufgefallen, dass die Reibungsverluste nicht vernachlässigt werden können. Deswegen wollen wir jetzt Reibungsverluste berücksichtigen und in dieser und der nächsten Teilaufgabe davon ausgehen, dass die Bierleitung durch das Gesetz von Hagen-Poiseuille (das in der Vorlesung am 8.1.2018 besprochen wird) beschrieben wird.

e) Wie muss die Druckdifferenz zwischen Beginn und Ende der Leitung verändert werden, um die doppelte Biermenge pro Jahr durch das gleiche Rohr zu transportieren?

Da das Bier durch das Gesetz von Hagen-Poiseuille beschrieben wird gilt: $Q = \frac{\pi}{8} \frac{r^4}{\eta l} \Delta p$
Damit musss die Druckdifferenz verdoppelt werden um einen doppelten Durchfluss zu erreichen.

f) Welchen Durchmesser müsste man für ein neues Rohr wählen, um die doppelte Biermenge pro Jahr zu transportieren, wenn die Länge und Druckdifferenz in der Leitung nicht verändert werden sollen?

Der Radius geht mit r^4 ein und alle anderen Variablen sollen konstant gehalten werden. Daher müssen wir auflösen: $r_{neu}^4 = 2 \cdot r_{alt}^4 \implies r_{neu} = 2^{\frac{1}{4}} r_{alt} = 5.95$ cm