Erster Hauptsatz der Thermodynamik

$$\mathrm{d}E = \delta Q + \delta A \quad . \tag{1}$$

$\mathrm{d}E$ ist hierbei die Änderung der inneren Energie des Systems, δQ die zugeführte Wärme und δA die am System geleistete Arbeit.

Volumenarbeit

$$\delta A = -p\mathrm{d}V \quad , \tag{2}$$

$$A = -\int_{V_{\mathrm{Anfang}}}^{V_{\mathrm{Ende}}} p\mathrm{d}V \quad . \tag{3}$$

Entropie

$$S(E,V,N) = k_{\mathrm{B}} \ln \Omega(E,V,N) \quad , \tag{4}$$

wobei $\Omega(E,V,N)$ die Multiplizität des Mikrozustandes (Anzahl der Realisierungsmöglichkeiten) bei gegebener Energie E, gegebenem Volumen V und gegebener Teilchenzahl N ist.

$$\mathrm{d}S \geq \frac{\delta Q}{T} \quad . \qquad \text{Bei reversiblen Prozessen gilt } \delta Q = T\mathrm{d}S. \tag{5}$$

Ideales Gas

Zustandsgleichungen:

$$pV = Nk_{\mathrm{B}}T \qquad\qquad E = \frac{f}{2}Nk_{\mathrm{B}}T \quad , \tag{6}$$

wobei f die Anzahl der quadratischen Freiheitsgrade ist. Für eine adiabatische Zustandsänderung gilt:

$$pV^{\gamma} = const. \quad , \qquad\qquad TV^{\gamma-1} = const. \tag{7}$$

mit dem Adiabatenindex $\gamma = \frac{f+2}{f}$, wobei f die Anzahl der quadratischen Freiheitsgrade ist. Die Wärmekapazitäten bei konstantem Volumen und konstantem Druck sind gegeben durch

$$C_V = \frac{f}{2}Nk_{\mathrm{B}} \quad , \qquad\qquad C_p = \frac{f}{2}Nk_{\mathrm{B}} + Nk_{\mathrm{B}} \quad . \tag{8}$$

Weiterhin gilt $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$.

Die Entropie des ein-atomigen ideales Gases ist gegeben durch die Sackur-Tetrode-Gleichung:

$$S = k_{\mathrm{B}}N\left(\ln\left(\frac{V}{N\lambda_{\mathrm{th}}^3}\right) + \frac{5}{2}\right) \quad , \qquad \lambda_{\mathrm{th}} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_{\mathrm{B}}T}} \quad .$$

Van-der-Waals-Gas

Thermische Zustandsgleichung:

$$p = \frac{N k_\mathrm{B} T}{V - Nb} - a \left(\frac{N}{V}\right)^2 \quad . \tag{9}$$

Innere Energie eines ein-atomigen Gases (kalorische Zustandsgleichung):

$$E = \frac{3}{2} N k_\mathrm{B} T - a \frac{N^2}{V} \quad . \tag{10}$$

Thermodynamische Potenziale

Alle angegeben Relationen gelten nur für eine einzige Teilchensorte und es wird dabei davon ausgegangen, dass es sich bei der Arbeit nur um Volumenarbeit handelt.
Helmholtz Freie Energie:

$$F = E - TS \quad . \tag{11}$$

Enthalpie:

$$H = E + pV \quad . \tag{12}$$

Gibbssche Freie Enthalpie:

$$G = E - TS + pV \quad . \tag{13}$$

Differenziale der thermodynamischen Potenziale:

$$\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V + \mu \mathrm{d}N \quad , \tag{14}$$
$$\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V + \mu \mathrm{d}N \quad , \tag{15}$$
$$\mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p + \mu \mathrm{d}N \quad , \tag{16}$$
$$\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p + \mu \mathrm{d}N \quad . \tag{17}$$

Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses

$$\eta_\mathrm{Carnot} = \frac{\text{abgegebene Arbeit}}{\text{zugeführte Wärmemenge}} = 1 - \frac{T_K}{T_H} \quad .$$

Mathematische Formeln

Integrale:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \tag{18}$$

$$\int_0^\infty x^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \qquad \int_{-\infty}^\infty x^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{19}$$

$$\int_0^\infty x^3 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \qquad \int_0^\infty x^4 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \tag{20}$$

$$\int_0^\infty \sqrt{x} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = n! \tag{21}$$

Stirling-Formel:

$$\ln N! \approx N \ln N - N \tag{22}$$

Kanonisches Ensemble

Wahrscheinlichkeit, ein System im Zustand r zu finden:

$$P_r = \frac{\mathrm{e}^{-\beta E_r}}{Z} \quad ,$$

wobei E_r die Energie des Zustandes r, $\beta = 1/k_\mathrm{B}T$ und Z die Zustandssumme

$$Z = \sum_{\text{alle Zustände } n} \mathrm{e}^{-\beta E_n}$$

ist. Die Helmholtz Freie Energie ist gegeben durch:

$$F = -k_\mathrm{B}T \ln Z \quad . \tag{23}$$

Die mittlere Energie $\langle E \rangle = \sum_i P_i E_i$ lässt sich damit etwa schreiben als

$$\langle E \rangle = \sum_i P_i E_i = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \quad . \tag{24}$$

Für ein System von N identischen, nicht wechselselwirkenden Teilchen gilt im semi-klassischen Bereich für die N-Teilchen-Zustandssumme Z_N:

$$Z_N = \begin{cases} Z_1^N & \text{für unterscheidbare Teilchen.} \\ \frac{Z_1^N}{N!} & \text{für ununterscheidbare Teilchen.} \end{cases} \tag{25}$$

Dabei ist Z_1 die semi-klassische Ein-Teilchen-Zustandssumme:

$$Z_1 = \frac{1}{h^3} \int \mathrm{d}^3\mathbf{p} \int \mathrm{d}^3\mathbf{q}\, \mathrm{e}^{-\beta H(\mathbf{p},\mathbf{q})} \quad , \tag{26}$$

wobei $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ die Ein-Teilchen-Hamilton-Funktion ist.

Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung

$$w(v)\mathrm{d}v = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_\mathrm{B}T} \right)^{3/2} v^2 \mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2k_\mathrm{B}T}} \mathrm{d}v \quad , v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad . \tag{27}$$

Mittlere Besetzungszahlen

$$N_i = \begin{cases} g_i \mathrm{e}^{-\beta(E_i - \mu)} & \text{Maxwell} - \text{Boltzmann} \\ \frac{g_i}{\mathrm{e}^{\beta(E_i-\mu)}+1} & \text{Fermi} - \text{Dirac} \\ \frac{g_i}{\mathrm{e}^{\beta(E_i-\mu)}-1} & \text{Bose} - \text{Einstein} \end{cases} \tag{28}$$