Prof. Dr. Stefan Hofmann Wintersemester 2018/19

Übungen zur Quantenmechanik (T2)

Übungsblatt 1, Besprechung vom 18.10.-22.10.

Dieses Übungsblatt dient der Wiederholung einiger relevanter Grundlagen aus vorherigen Vorlesungen. Falls Sie bei der Bearbeitung Probleme haben sollten Sie dies zum Anlass nehmen den zugrundeliegenden Stoff zu wiederholen.

Aufgabe 1 – Lineare Algebra

Gegeben sei die Matrix $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

(i) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix M.

(ii) Diagonalisieren Sie M.

(iii) Berechnen Sie M^2 durch direkte Matrixmultiplikation und durch die Definition einer Matrixfunktion $f(M) \coloneqq Uf(D)U^{-1}$, wobei $M = UDU^{-1}$, und D eine Diagonalmatrix ist.

(iv) Überzeugen Sie sich, dass M eine hermitesche Matrix ist, und berechnen Sie ihre Spur $\mathrm{tr}(M)$.

(v) Zeigen Sie, dass der Raum der hermiteschen, spurlosen $n \times n$ Matrizen versehen mit Matrixaddition und skalarer Multiplikation einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet. Bilden diese Matrizen auch einen $\mathbb{C}$-Vektorraum?

Eine Basis dieses Vektorraumes bilden die Gell-Mann-Matrizen

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(vi) Zeigen Sie, dass für zwei hermitesche, spurlose Matrizen A, B die Abbildung $\langle A, B\rangle \coloneqq \mathrm{tr}(AB)$ ein inneres Produkt auf dem Raum der hermiteschen, spurlosen Matrizen definiert.

(vii) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{e_i\}_{i\in I(8)}$ mit $e_i \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_i$ orthonormal zueinander sind.

(viii) Finden Sie die Darstellung von M in der Basis $\{e_i\}_{i\in I(8)}$ durch Projektion auf die Basisvektoren.

Aufgabe 2 – Funktionenräume

(i) Betrachten Sie den Funktionenraum

$$\mathscr{L}^2([0,1],\mathbb{R}) \coloneqq \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} : \int_0^1 \mathrm{d}x\ |f(x)|^2 < \infty \wedge f(x=0) = f(x=1) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathscr{L}^2$ zusammen mit punktweiser Addition

$$\oplus\colon \mathscr{L}^2 \times \mathscr{L}^2 \to \mathscr{L}^2 \tag{1}$$
$$(f,g) \mapsto f \oplus g, \text{ so dass } (f \oplus g)(x) \coloneqq f(x) +_{\mathbb{R}} g(x) \tag{2}$$

und skalarer Multiplikation

$$\odot\colon \mathbb{R} \times \mathscr{L}^2 \to \mathscr{L}^2 \tag{3}$$
$$(\lambda, f) \mapsto \lambda \odot f, \text{ so dass } (\lambda \odot f)(x) \coloneqq \lambda \cdot_{\mathbb{R}} f(x) \tag{4}$$

einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.
Später werden wir Vektoraddition und skalare Multiplikation mit $+$ respektive $\cdot$ bezeichnen, hier soll nur verdeutlicht werden, dass es sich bei diesen Operationen um Vektoroperationen und nicht um Körperoperationen handelt.

(ii) Zeigen Sie, dass durch $\langle f,g\rangle = \int_0^1 \mathrm{d}x\, f(x)g(x)$ eine positiv-semidefinite Bilinearform definiert wird. Warum ist diese nicht positiv-definit? Welche Schritte können Sie unternehmen, um einen Vektorraum mit einem inneren Produkt zu erhalten?

(iii) Betrachten Sie nun den Unterraum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$. Die Funktionen $\{\sin(\pi n x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ bilden eine orthogonale Basis dieses Unterraums. Entwickeln Sie die folgenden Elemente von $\mathscr{L}^2([0,1],\mathbb{R})$ in dieser Basis:
$$f_1(x) = \sin(\pi x), \quad f_2(x) = \sin^2(\pi x), \quad f_3(x) = x^2 - x$$

Aufgabe 3 – Fourier-Transformationen

Wir betrachten im Folgenden den Raum der glatten Funktionen mit kompaktem Träger (wir definieren für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ den Träger als $\text{Träger}(f) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}\colon f(x) \neq 0\}$), bezeichnet als $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Wir definieren die Fourier-Transformation einer Funktion $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ als

$$\hat{f}(k) \coloneqq \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, f(x) e^{-ikx}. \tag{5}$$

(i) Bestimmen Sie die inverse Fourier-Transformation, d.h. drücken Sie $f(x)$ durch $\hat{f}(k)$ aus. Die folgende Darstellung der Delta-Distribution können Sie dabei benutzen:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{ikx} = 2\pi\delta(k)$$

(ii) Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, |f(x)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \left|\hat{f}(k)\right|^2, \tag{6}$$

b)
$$\widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n \hat{f}(k), \tag{7}$$

c)
$$\hat{f}_a(k) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{k}{a}\right), \text{ wobei } f_a(x) = f(ax) \text{ und } a \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Wir können diese Fourier-Transformation auf einen größeren Raum von Funktionen erweitern, das genaue Vorgehen hierfür geben wir an dieser Stelle nicht an. Im Folgenden können Sie also Ihre Kenntnisse der Fouriertransformation benutzen und müssen sich keine Sorgen um Konvergenz von Integralen machen, es lässt sich alles wohldefinieren.

(iii) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierten der folgenden Funktionen (für $a \in \mathbb{R}^+$):

a) $f_1(x) = e^{-ax^2}$

b) $f_2(x) = \sin(ax)$

c) $f_3(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$

Aufgabe 4 – Hamilton-Formalismus

(i) Leiten Sie durch Variation der Wirkung $S = \int \mathrm{d}t\, L(q, \dot{q}(q,p)) = \int \mathrm{d}t\, p\dot{q}(q,p) - H(q,p)$ die Hamiltonschen Gleichungen her.

(ii) Betrachten Sie ein System dessen Dynamik invariant ist unter der Transformation $q \to q + \Delta q$. Welche Erhaltungsgröße ergibt sich hieraus? Welche resultiert aus der Invarianz unter $t \to t + \Delta t$? Begründen Sie durch explizite Rechnung!

(iii) Überprüfen Sie für die folgenden Lagrangefunktionen, ob der Drehimpuls, der Impuls respektive die Energie erhalten ist:

$$L(x,y,t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\alpha}{x^2 + y^2}$$
$$L(r,\phi,t) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\phi}^2 - \alpha(t) r \cos(\phi)$$

(iv) Zeigen Sie, dass für eine beliebige Funktion $O(q(t), p(t), t)$ die folgenden Identitäten gelten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} O(q(t), p(t), t) = \{O, H\} + \frac{\partial O}{\partial t}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} O(q(t), p(t), t) = \{O, p\}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} O(q(t), p(t), t) = -\{O, q\}$$

(v) Bestimmen Sie für die folgende Lagrange-/Hamilton-Funktion die dazugehörige Hamilton-/Lagrange-Funktion:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{\mu}{4}\dot{q}^4 - aq\dot{q} - \frac{\omega}{2}q^2$$
$$H(q,p) = \frac{1}{2}(\mu p - \lambda q)^2$$

(vi) Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m im eindimensionalen Oszillatorpotential $V(q) = \frac{m\omega^2}{2}q^2$. Bestimmen Sie $q(t)$ und $p(t)$ und skizzieren Sie diese im Phasenraum. Beschreiben Sie anschließend, wie Sie Ihre Skizze anpassen müssten, um zwei Teilchen in diesem Potential darstellen zu können.

Allgemeine Informationen

Die Vorlesungszeiten sind Montag 14:00-16:00 Uhr in H 030 (Schellingstraße 4)
und Mittwoch 14:00-16:00 Uhr in H 030 (Schellingstraße 4).

Die Zentralübung findet statt am
Donnerstag 10:00-12:00 Uhr in A 348 (Theresienstraße 37).

Die Vorlesungswebseite ist:

`https://www.physik.uni-muenchen.de/lehre/vorlesungen/wise_18_19/t2qmws18/index.html`

Bei Fragen zur Organisation der Tutorien wenden Sie sich bitte an Thomas.Steingasser@physik.lmu.de