Prof. Dr. Stefan Hofmann Wintersemester 2018/19

Übungen zur Quantenmechanik (T2)

Übungsblatt 10, Besprechung vom 20.12 – 07.01

Aufgabe 1 – Kurzfragen

Betrachten Sie für eine Wellenfunktion $\Psi_t \in \mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ die Wahrscheinlichkeit das beschriebene Punktteilchen zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ an einem beliebigen Ort $q \in M$ anzutreffen:

$$\mathrm{Wahr}_{\Psi_t}\{q \in M\} := \int_M \mathrm{d}^3 q |\Psi_t(q)|^2_{\mathbb{C}}$$

(i) Inwiefern ändert sich diese Wahrscheinlichkeit für $M = \mathbb{R}^3$ unter folgenden Operationen:

a) Translation: $\Psi_t(q) \to \Psi_t(q+a)$

b) Rotation: $\Psi_t(q) \to \Psi_t(Rq)$

c) Globale Phase: $\Psi_t(q) \to \Psi_t(q)e^{i\phi}$ mit $\phi \in \mathbb{R}$

(ii) Wählen Sie nun $M = \mathbb{R}$ und $\Psi_t(q) = Ne^{-\frac{(q-q_0)^2}{2\sigma^2}}$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$.

a) Normieren Sie die Wellenfunktion, sodass die Wahrscheinlichkeit das Teilchen irgendwo zu finden 1 ist.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in M bzw. in $N = \{q \in \mathbb{R} | -1 < q < 1\}$ zu finden.

c) Berechnen Sie die Varianz des Ortsoperators der Wellenfunktion.

d) Wiederholen Sie a)-c) für $\Psi_t(q)$ unter Anwendung einer Translation und globalen Phase.

(iii) Zeigen Sie mithilfe der Kurzfragen von Blatt 9 folgende Identitäten

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{[A,B]}{2}}$$
$$e^A e^B = e^B e^A e^{[A,B]}$$

für die Operatoren A und B falls $\big[A,[A,B]\big] = \big[B,[B,A]\big] = 0$ gelte.

Aufgabe 2 – Infinitesimale Rotationen

Versuchen Sie, diese Aufgabe soweit wie möglich in Indexnotation zu lösen, d.h. ohne eine Darstellung als Spaltenvektor zu wählen.
Betrachten Sie im Folgenden die infinitesimale Rotation eines Einheitsvektors $e_i \to e'_i = R_{ij}e_j$ um einen Winkel $\delta\phi$ um eine Achse $\boldsymbol{n}$.

(i) Zeigen Sie, dass die Rotationsmatrix durch

$$R_{ij} = \delta_{ij} + \delta\phi\varepsilon_{ijk}n_k \tag{1}$$

gegeben ist.
Hinweis: Nutzen Sie, dass für rechtshändige Koordinatensysteme $e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk}e_k$ gilt.

Wir wissen aus dem letzten Blatt, dass diese Rotationen durch drei unabhängige Generatoren erzeugt werden, welche wir im Folgenden mit T^a, $a = 1, 2, 3$ bezeichnen. Wir wählen diese als die infinitesimalen Rotationen um die x-, y- und z-Achse. Wir wählen im Folgenden hermitesche Generatoren, d.h. wir definieren die infinitesimale Rotation um die Achse a als

$$R_{ij} = \delta_{ij} + i\delta\phi_a(T^a)_{ij},$$

wobei $\delta\phi_a = \delta\phi n_a$ und $(T^a)_{ij}$ die ij-Komponente von T^a ist.

(ii) Bestimmen Sie die Form von $(T^a)_{ij}$ in dieser Konvention durch Vergleichen mit (1).

(iii) Berechnen Sie die Kommutatorrelation $[T^a, T^b]$.

Als nächstes möchten wir infinitesimale Rotationen verknüpfen, um endliche Rotationen zu erhalten.

(iv) Zeigen Sie, dass für die Verknüpfung zweier infinitesimaler Rotationen mit $\delta\phi_a^1$ und $\delta\phi_a^2$ gilt

$$R_{ij} = \delta_{ij} + i\left(\delta\phi_a^1 + \delta\phi_a^2\right)(T^a)_{ij}.$$

Die Verknüpfung infinitesimaler Rotationen entspricht also einfach der Addition beider infinitesimaler Transformationen. Dies gilt im Allgemeinen **nicht** für endliche Rotationen.
Nun werden wir eine Rotation um einen endlichen Winkel ϕ_a durch Verknüpfung infinitesimaler Rotationen beschreiben. Betrachten Sie hierfür zunächst eine Rotation um die x-Achse um Winkel ϕ. Diese Rotation entspricht dem Produkt infinitesimaler Rotationen mit Winkel $\delta\phi$ um die x-Achse, gegeben durch

$$R(\phi) = \lim_{N\to\infty}\left(\mathbb{1} + \frac{i}{N}\phi T^1\right)^N, \tag{2}$$

wobei $\delta\phi = \lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\phi$.

(v) Zeigen Sie, dass die in (2) definierte Darstellung äquivalent zur Exponentialdarstellung auf dem letzten Blatt ist, d.h.

$$R(\phi) = \exp(i\phi T^1).$$

(vi) Zeigen Sie auf diesem Weg, dass die Rotation um Winkel θ um eine beliebige Achse $\boldsymbol{n}$ beschrieben wird durch

$$R_{\boldsymbol{n}}(\theta) = \exp(i\theta_a T^a), \text{wobei } \theta_a = \theta n_a.$$

(vii) Zeigen Sie, dass die so definierten Rotationsmatrizen orthogonal sind.

(viii) Gilt für endliche Rotationen immer noch

$$\exp(i\phi_a T^a)\exp(i\theta_b T^b) = \exp(i(\phi_a + \theta_a)T^a)?$$

Aufgabe 3 – Spin-Algebra Teil I

In der folgenden Aufgabe werden wir die im Stern-Gerlach Experiment verwendeten Eigenzustände von S_z weiter analysieren. Wir betrachten die Spin-Operatoren S_x, S_y und S_z mit $[S_i, S_j] = i\varepsilon_{ijk}S_k$. Zusätzlich betrachten wir den Operator $\boldsymbol{S}^2$, welcher mit allen Spin-Operatoren kommutiert, d.h. $[\boldsymbol{S}^2, S_i] = 0$ (vgl. Blatt 4), sowie die Operatoren S_+ und S_-, definiert als (vgl. Blatt 3)

$$S_+ = S_x + iS_y, \qquad S_- = S_x - iS_y.$$

(i) Berechnen Sie die Kommutatoren $[S_+, S_-]$, $[\boldsymbol{S}^2, S_\pm]$ sowie $[S_z, S_\pm]$.

(ii) Schreiben Sie den Operator $\boldsymbol{S}^2$ mittels $S_\pm$, S_z.

Da die Operatoren $\boldsymbol{S}^2$ und S_z kommutieren, besitzen sie eine simultane Eigenbasis. Wir bezeichnen diese Eigenvektoren als $|\,\lambda, \mu\rangle$, so dass

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}^2 \,|\,\lambda, \mu\rangle &= \lambda \,|\,\lambda, \mu\rangle \,, \\ S_z \,|\,\lambda, \mu\rangle &= \mu \,|\,\lambda, \mu\rangle \,. \end{aligned}$$

(iii) Zeigen Sie, dass es zu $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ein maximales und ein minimales $\mu_{\max}$ bzw. $\mu_{\min}$ gibt, da $\mu^2 \leq \lambda$. Betrachten Sie hierfür $\langle \lambda, \mu \,|\, \boldsymbol{S}^2 - S_z^2 \,|\, \lambda, \mu \rangle$.

Im Folgenden bezeichnen wir den maximalen Eigenwert $\mu_{\max} = s$ und den minimalen $\mu_{\min} = s'$.

(iv) Bestimmen Sie die Wirkung von $S_\pm$ auf einen Zustand $|\,\lambda, \mu\rangle$. Wie verändert sich der Eigenwert λ, wie der Eigenwert μ?

(v) Zeigen Sie, dass die Anwendung von S_+ auf den Zustand mit maximalem $\mu = s$, bzw. S_- auf den mit minimalem $\mu = s'$ den Nullvektor ergeben muss, d.h.

$$S_+ \,|\,\lambda, s\rangle = 0, \quad S_- \,|\,\lambda, s'\rangle = 0.$$

(vi) Überzeugen Sie sich, dass die Differenz $s - s'$ ganzzahlig ist.

(vii) Bestimmen Sie die Wirkung von $\boldsymbol{S}^2$ in der Darstellung durch $S_\pm$, S_z aus (ii) auf die Zustände mit maximalem $\mu = s$ bzw. minimalem $\mu = s'$, und zeigen Sie, dass $\lambda = s(s+1) = s'(s'-1)$.

(viii) Nutzen Sie diese Gleichung, um eine Relation zwischen s und s' herzuleiten. Wie viele verschiedene Eigenwerte von S_z gibt es für ein gegebenes s?

(ix) Folgern Sie daraus, dass s ganz- oder halbzahlig sein muss.

Es ist Konvention, die S_z Eigenwerte durch m, sowie die Eigenzustände von $\boldsymbol{S}^2$ durch das maximale s und die Relation $\lambda(s)$ zu bezeichnen, d.h.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}^2 \,|\,s, m\rangle &= s(s+1) \,|\,s, m\rangle \,, \\ S_z \,|\,s, m\rangle &= m \,|\,s, m\rangle \,. \end{aligned}$$