Prof. Dr. Stefan Hofmann Wintersemester 2018/19

Übungen zur Quantenmechanik (T2)

Übungsblatt 11, Besprechung vom 10.01 – 14.01

Aufgabe 1 – Impuls

(i) Zeigen Sie für $x, a \in \mathbb{R}$ und eine beliebige Wellenfunktion $\psi(x)$, dass

$$\exp\left(-a\partial_x\right)\psi(x) = \psi(x-a).$$

(ii) Nutzen Sie diese Eigenschaft und den Satz von Stone, um die Ortsdarstellung des Impulsoperators $\mathscr{P}$ zu finden. Finden Sie auch die notwendigen Faktoren von $\hbar$, um dem Impuls-Erwartungswert die kanonische Dimension $[\langle\mathscr{P}\rangle] = \frac{[\text{Wirkung}]}{[\text{Länge}]} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$ zu geben.

(iii) Finden Sie die explizite Ortsraum-Darstellung von $e_p(x) = \langle x \,|\, p\rangle$. Betrachten Sie hierfür $\langle x \,|\, \mathscr{P} \,|\, p\rangle$. Bestimmen Sie die Normierungskonstante, indem Sie

$$\langle p \,|\, q\rangle = \int \mathrm{d}x\ \langle p \,|\, x\rangle \langle x \,|\, q\rangle = \delta(p-q)$$

fordern.

(iv) Betrachten Sie nun die drei euklidischen Ortsoperatoren $\mathscr{Q}^a$, $a = 1,2,3$ und zugehörigen Impulsoperatoren $\mathscr{P}_b$, $b = 1,2,3$ mit der oben bestimmten Darstellung. Zeigen Sie die Kommutatorrelationen

$$\begin{aligned}
[\mathscr{Q}^a, \mathscr{P}_b] &= \mathrm{i}\hbar\delta^a_b,\\
[\mathscr{Q}^a, (\mathscr{P}_b)^n] &= \mathrm{i}n\hbar\delta^a_b\,\mathscr{P}_b^{n-1},\\
[\mathscr{P}_a, (\mathscr{Q}^b)^n] &= -\mathrm{i}n\hbar\delta^a_b(\mathscr{Q}^b)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Was können Sie mithilfe der ersten Relation über die Ortsdarstellung des Impulsoperators folgern, wenn Sie diese nur aus den Kommutatorrelationen bestimmen möchten? Wie sieht die allgemeinst mögliche Form aus und welche Konsequenz hat diese für mögliche Messwerte?

(v) Bestimmen Sie die Fourier-Transformation der Funktionen

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \exp\left(-ax^2 + bx + c\right),\\
f_2(x) &= \begin{cases} 1 & \text{für } -a < x < a,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 – Unschärfe

(i) Die Ortsdarstellung eines Zustands $|\,\alpha\rangle$ ist gegeben durch

$$\langle x\,|\,\alpha\rangle = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} + \mathrm{i}\frac{kx}{\hbar}\right)$$

Bestätigen Sie für diesen Zustand die Heisenbergsche Unschärferelation für den Orts- und Impulsoperator. Was zeichnet das Gauß'sche Wellenpaket aus?

(ii) Zeigen Sie die verallgemeinerte Unbestimmtheitsrelation für zwei Observablen $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ und einen beliebigen Zustand Φ

$$\mathrm{Streu}_\Phi(\mathscr{A})\mathrm{Streu}_\Phi(\mathscr{B}) \geq \frac{1}{2}\Big|\,\langle\Phi\,|\,[\mathscr{A},\mathscr{B}]\,|\,\Phi\rangle\,\Big|.$$

(iii) Bestimmen Sie die normierten Spin$-\frac{1}{2}$ Zustände $|\,\psi\rangle$, für die das Unschärfe-Produkt

$$\mathrm{Streu}_\psi(S_x)\mathrm{Streu}_\psi(S_y)$$

minimal bzw. maximal wird. Überprüfen Sie zudem explizit, dass für diese Zustände die Unschärferelation für S_x und S_y nicht verletzt ist.

Aufgabe 3 – Spin-Algebra Teil II

Diese Aufgabe ist der zweite Teil zu Aufgabe 3 auf dem letzten Blatt. Stellen Sie sicher, dass Sie die Analyse der Drehimpulsalgebra verstanden haben, denn diese Aufgabe wird eine analoge Analyse für Tensorprodukte durchführen.
Wir betrachten nun die Zustände $|\,s,m\rangle$ definiert wie in Aufgabe 3 auf dem letzten Blatt, und wir definieren sie so, dass sie ein Orthonormalsystem bilden.

(i) Auf dem letzten Blatt haben wir gezeigt, dass $S_-\,|\,s,m\rangle = N_m\,|\,s,m-1\rangle$. Bestimmen Sie N_m. Zeigen Sie, dass

$$S_-\,|\,s,m\rangle = N_m\,|\,s,m\rangle\,,$$
$$S_+\,|\,s,m\rangle = N_{m+1}\,|\,s,m+1\rangle\,,$$

also dass wir die gleiche Normierungskonstante für beide Operatoren benutzen können.
Hinweis: Starten Sie mit $|\,s,s\rangle$ und finden Sie eine Rekursionsrelation für N_m.

(ii) Welche Dimension hat die Darstellung $s=\frac{1}{2}$? Welche die Darstellung $s=1$?

(iii) Bestimmen Sie die Matrix-Darstellung der Operatoren S_a in der Basis der $|\,s,m\rangle$, gegeben durch

$$(S_a^s)_{m,m'} = \langle s,m\,|\,S_a\,|\,s,m'\rangle\,,$$

für $s=\frac{1}{2}$ und $s=1$. Überprüfen Sie an einem Beispiel, dass die Algebra erfüllt ist.
Hinweis: Nutzen Sie die Algebra und bestimmen Sie S_x, S_y aus S_+ und S_-.

Nun werden wir das Tensorprodukt eines $s=\frac{1}{2}$ Systems mit einem $s=1$ System betrachten, und dieses in eine direkte Summe von Darstellungen mit bestimmtem s' zerlegen. Im Folgenden bezeichnen wir diese Systeme durch $\mathbf{\frac{1}{2}}$ bzw. $\mathbf{1}$, d.h. $\mathbf{1}$ ist die Spin-1 Darstellung von $SU(2)$. Unser Vorgehen wird analog zu Aufgabe 3 auf dem letzten Blatt sein.

(iv) Bestimmen Sie die Dimension des Tensorproduktes $\mathbf{\frac{1}{2}}\otimes\mathbf{1}$.

Ein Zustand $|\,s_1,m_1;s_2,m_2\rangle$ des Produktsystems transformiert als

$$D_{\mathbf{\frac{1}{2}}\otimes\mathbf{1}}(U)\,|\,s_1,m_1;s_2,m_2\rangle = D_{\mathbf{\frac{1}{2}}}(U)\,|\,s_1,m_1\rangle \otimes D_{\mathbf{1}}(U)\,|\,s_2,m_2\rangle\,,$$

wobei $D_{\mathbf{s}}(U)$ die Spin-s Darstellung des Elements $U\in\mathrm{SU}(2)$ ist, d.h. bezüglich der Matrixdarstellung der Generatoren wie in (iii).

(v) Zeigen Sie, dass für infinitesimale Transformationen, d.h.

$$D_{\mathbf{s}}(U) = \mathbb{1}_{\mathbf{s}} + \alpha_a S_{a,\mathbf{s}},$$

die Drehimpulse addiert werden, d.h.

$$S_{a,\mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_2} = S_{a,\mathbf{s}_1} \otimes \mathbb{1}_{\mathbf{s}_2} + \mathbb{1}_{\mathbf{s}_1} \otimes S_{a,\mathbf{s}_2}.$$

Dies bedeutet, dass für Produktzustände m einfach addiert wird.

(vi) Überzeugen Sie sich damit, dass der Zustand mit maximalem m in $\mathbf{\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{1}$ gegeben ist durch

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes |\, 1, 1\rangle = \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle.$$

(vii) Finden Sie die Produktdarstellung der anderen Zustände $\left|\, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$, $\left|\, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$ sowie $\left|\, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$ durch Anwenden von $S_{-,\mathbf{\frac{1}{2}}\otimes\mathbf{1}}$. Spannen diese Zustände $\mathbf{\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{1}$ auf?
Hinweis: Nutzen Sie das Resultat aus (v) um Leiteroperatoren auf dem Tensorprodukt aus den Leiteroperatoren der Faktorenräume zu konstruieren.

(viii) Überlegen Sie sich aus der Drehimpulsalgebra und durch Betrachten der Dimension, in welcher s-Darstellung die fehlenden Zustände liegen. Nutzen Sie dann $m = m_1 + m_2$ für Produktzustände, um diese Zustände aus Kombinationen von Produktzuständen von $\mathbf{\frac{1}{2}}\otimes\mathbf{1}$ zu konstruieren, welche orthogonal zu den $\mathbf{\frac{3}{2}}$-Zuständen sind.

Dieses Vorgehen funktioniert für beliebige Tensordarstellungen von SU(2). Wir finden den Zustand mit maximalem m, und zerlegen die Produktdarstellung dann in Darstellungen mit bestimmtem s.

(ix) Überzeugen Sie sich, dass für beliebige Darstellungen $\mathbf{s}_1$ und $\mathbf{s}_2$ gilt

$$\mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_2 = \bigoplus_{s=|s_1-s_2|}^{s_1+s_2} \mathbf{s},$$

wobei $\bigoplus$ die direkte Summe ist. Im obigen Beispiel entspricht dies

$$\mathbf{\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{\frac{1}{2}} \oplus \mathbf{\frac{3}{2}}.$$

Sie müssen hierfür nicht die explizite Darstellung der Zustände angeben, sondern lediglich das allgemeine Vorgehen für jedes s und die Zustände jeder Darstellung richtig zählen.