Prof. Dr. Stefan Hofmann Wintersemester 2018/19

Übungen zur Quantenmechanik (T2)

Übungsblatt 12, Besprechung vom 17.01 – 21.01

Aufgabe 1 – „Radialer“ Impulsoperator

Betrachten Sie im Folgenden den Raum der quadrat-integrablen Funktionen auf der reellen Halblinie,

$$\mathscr{H} = L^2([0,\infty)).$$

Wir definieren den „radialen“ Impulsoperator $\mathscr{P} = -\mathrm{i}\hbar\partial_x$ mit Definitionsmenge

$$\mathscr{D}(\mathscr{P}) = \{\phi \in \mathscr{H} \colon \mathscr{P}\phi \in \mathscr{H} \wedge \phi(0) = 0\}.$$

Die Definitionsmenge des adjungierten Operators $\mathscr{P}^\dagger$ ist gegeben durch

$$\mathscr{D}(\mathscr{P}^\dagger) = \{\phi \in \mathscr{H} \colon \mathscr{P}^\dagger\phi \in \mathscr{H}\},$$

ohne Randbedingung.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathscr{P}$ auf seiner Definitionsmenge hermitesch ist.

(ii) Zeigen Sie dass es in $\mathscr{D}(\mathscr{P}^\dagger)$ normierbare Lösungen von

$$\mathscr{P}^\dagger\phi = i\phi$$

gibt, aber keine Lösungen von

$$\mathscr{P}^\dagger\phi = -i\phi$$

(mathematisch bedeutet dies, dass die *Defektindizes* unterschiedlich sind). Dies bedeutet, dass keine selbst-adjungierte Erweiterung von $\mathscr{P}$ auf $[0,\infty)$ existiert. Interpretieren Sie dieses Ergebnis und überlegen Sie sich, ob der Begriff des Impulses für dieses System sinnvoll ist.

Aufgabe 2 – Hamiltonoperator

Betrachten Sie ein Zwei-Zustandssystem mit der Darstellung der Orthonormalbasis $\{|1\rangle\,,\ |2\rangle\}$ als

$$|1\rangle \doteq (1,0)^T, \quad |2\rangle \doteq (0,1)^T.$$

Der Hamiltonoperator ist in dieser Basis gegeben als

$$H = \begin{pmatrix} \varepsilon & g \\ g & \varepsilon \end{pmatrix},$$

wobei $\varepsilon, g \in \mathbb{R}$.

(i) Welche Werte können bei einer Messung der Energie beobachtet werden, und in welchem Zustand befindet sich das System jeweils nach dieser Messung?

(ii) Lösen Sie die Schrödinger-Gleichung für die Anfangsbedingung $|\,\Psi(t=0)\rangle = |\,1\rangle$ und geben Sie $|\,\Psi(t)\rangle$ explizit an.

(iii) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, das System bei einer Messung im Zustand $|\,2\rangle$ zu finden, als Funktion von t und überprüfen Sie explizit, dass die Norm von $|\,\Psi\rangle$ erhalten bleibt.

Aufgabe 3 – Freies Teilchen

Betrachten Sie das Gaußsche Wellenpaket von Blatt 11, beschrieben durch den Zustand $|\,\alpha\rangle$ mit Ortsdarstellung

$$\langle x\,|\,\alpha\rangle = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} + \mathrm{i}\frac{kx}{\hbar}\right)$$

(i) Berechnen Sie $\alpha(x,t)$.

(ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte als Funktion von t und interpretieren Sie Ihre Lösung anhand von Skizzen.