Prof. Dr. Stefan Hofmann

Wintersemester 2018/19

Übungen zur Quantenmechanik (T2)

Übungsblatt 13, Besprechung vom 24.01 – 28.01

1 Aufgabe 1 – Parität der Energie-Eigenzustände

In der folgenden Aufgabe werden Sie zeigen, dass Energie-Eigenzustände für symmetrische Potentiale, d.h. $V(x) = V(-x)$, in einer Dimension stets gerade oder ungerade bezüglich $x \to -x$ sind. Gehen Sie dafür wie folgt vor:

(i) Der Paritätsoperator P wird definiert als $(P\psi)(x) = \alpha_\psi \psi(-x)$, mit $|\alpha_\psi| = 1$. Zeigen Sie, dass P eine Symmetrie ist, d.h. dass P Betragsquadrate der Amplituden invariant lässt.

(ii) Eine Symmetrie kann durch einen unitären Operator dargestellt werden. Welche Bedingung folgt damit für α_ψ?

(iii) Wir fordern nun, dass P auch eine Observable sein soll. Zeigen Sie, dass sie damit $\alpha_\psi = 1$ für alle ψ fordern können. Damit ist

$$(P\psi)(x) = \psi(-x).$$

(iv) Finden Sie die Eigenwerte von P und interpretieren Sie die Eigenfunktionen.

(v) Zeigen Sie, dass für symmetrische Potentiale $[P, H] = 0$ gilt, d.h. P ist eine Symmetrie der Hamiltonfunktion.

(vi) Wir können somit eine simultane Eigenbasis finden. Überzeugen Sie sich, dass dies bedeutet, dass die Energie-Eigenzustände entweder symmetrisch oder antisymmetrisch sind, d.h. $(P\psi_E)(x) = \pm\psi_E(x)$.

Aufgabe 2 – Endlich tiefer Potentialtopf

Betrachten Sie das eindimensionale Problem eines Potentialtopfs mit endlicher Tiefe: $V(x) = 0$ für $x > a/2$ und $x < -a/2$, $V(x) = -V_0$ für $-a/2 < x < a/2$.

(i) Lösen Sie die Schrödingergleichung ein Teilchen mit Energie $-V_0 < E < 0$ in allen drei Raumbereichen. Berücksichtigen Sie, dass die Lösung normierbar sein muss.

(ii) Welche Anschlussbedingungen muss die Lösung an den Stellen $x = -a/2$ und $x = a/2$ erfüllen?

(iii) Nutzen Sie die Anschlussbedingungen, um eine Bestimmungsgleichung für die Energieniveaus abzuleiten.

(iv) Lösen Sie die Bestimmungsgleichung für $V_0 \to \infty$. Diskutieren Sie die Lösung und wie diese für endliche V_0 aussehen würde.

Aufgabe 3 – Harmonischer Oszillator & Hermitesche Polynome

Betrachten Sie die Schrödingergleichung für Eigenzustände des harmonischen Oszillators

$$\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2+\frac{m\omega^2}{2}x^2\Big)\phi_n(x)=\hbar\omega(n+\frac{1}{2})\phi_n(x)\equiv\hbar\omega_n\phi_n(x). \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Substitution $u=\frac{x}{l}$ mit $l=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ die Gleichung (1) in die folgende überführt

$$\frac{\hbar\omega}{2}\Big(-\partial_u^2+u^2\Big)\Psi_n(u)=\hbar\omega_n\Psi_n(u). \tag{2}$$

(ii) Betrachten Sie nun den Ansatz $\Psi_n(u)=e^{-u^2/2}H_n(u)$. Zeigen Sie, dass aus Gleichung (2) für $H_n(u)$ folgt

$$\partial_u^2H_n(u)-2uH_n'(u)+2nH_n(u)=0 \tag{3}$$

Im Folgenden wollen wir zeigen dass Gleichung (3), die *Hermitesche Differentialgleichung*, durch die sogenannten *Hermiteschen Polynome* gelöst wird. Diese sind gegeben durch

$$H_n(u)\equiv(-1)^ne^{u^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n}e^{-u^2} \tag{4}$$

(iii) Beweisen Sie zunächst folgende Rekursionsrelation für die Hermiteschen Polynome durch Ableiten von Gleichung (4):

$$H_{n+1}(u)=2uH_n(u)-\partial_uH_n(u) \tag{5}$$

(iv) Nutzen Sie nun Gleichung (5) um zu zeigen, dass

$$e^{2x\lambda-\lambda^2}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{\lambda^n}{n!} \tag{6}$$

(v) Nutzen Sie nun Gleichung (6), um zu zeigen dass die Hermiteschen Polynome in der Tat Gleichung (3) lösen. Wenden Sie hierfür den Operator

$$\partial_u^2-2u\partial_u+2\lambda\partial_\lambda$$

auf beide Seiten von (6) an.

Nun wollen wir diese Ergebnisse im Kontext der Formulierung des Oszillators über Auf-/Absteigeoperatoren betrachten.

(vi) Lösen Sie zunächst die Gleichung für den Grundzustand, $\partial_u\Psi_0(u)=-u\Psi_0(u)$. Wählen Sie die Vorfaktoren so, dass $\phi_0(x)$ normiert ist.

(vii) Zeigen Sie, dass, für einen angeregten Zustand $|\,n\rangle$, $|\,n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n\,|\,0\rangle$ gilt. Wie sieht diese Identität im Ortsraum aus?

(viii) Berechnen und skizzieren Sie $\phi_n(x)$ für $n\in\{1,2,3\}$ unter Verwendung von Teilaufgabe (vi) und vergewissern Sie sich, dass ihre Ergebnisse mit der Darstellung über hermitesche Polynome übereinstimmen. Hierfür dürfen sie die Normierungsfaktoren aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, d.h.

$$\phi_n(x)=\big(n!2^n\sqrt{\pi}l\big)^{-1/2}e^{-\frac{x^2}{2l^2}}H_n(\frac{x}{l}).$$