Prof. Dr. Stefan Hofmann Wintersemester 2018/19

# Übungen zur Quantenmechanik (T2)

## Übungsblatt 14, Besprechung vom 31.01 – 04.02

## Aufgabe 1 – Kohärente Zustände

In der Vorlesung haben Sie die sogenannten *kohärenten Zustände* kennengelernt, die definiert sind durch

$$|\,\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|\,n\rangle\,,$$

wobei $\alpha = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\rho, \varphi \in \mathbb{R}$.

(i) Vergewissern Sie sich zunächst, dass $|\,\alpha\rangle$ normiert ist.

(ii) Zeigen Sie, dass kohärente Zustände $|\,\alpha\rangle$ Eigenzustände des Absteigeoperators $a$ sind, d.h. dass

$$a\,|\,\alpha\rangle = \alpha\,|\,\alpha\rangle\,.$$

(iii) Bestimmen Sie den Impuls-Erwartungswert

$$\mathrm{Erw}_\alpha\left(\mathscr{P}\right)(t) = \langle\alpha(t)\,|\,\mathscr{P}\,|\,\alpha(t)\rangle\,,$$

analog zur Berechnung von $\mathrm{Erw}_\alpha\left(\mathscr{Q}\right)$ in der Vorlesung.

(iv) Überprüfen Sie die Bewegungsgleichung des Impuls-Erwartungswerts

$$\mathrm{Erw}_\alpha\left(\mathscr{P}\right) = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Erw}_\alpha\left(\mathscr{Q}\right).$$

(v) Berechnen Sie $\mathrm{Streu}_\alpha\left(\mathscr{Q}\right)$ und $\mathrm{Streu}_\alpha\left(\mathscr{P}\right)$ und zeigen Sie die Unschärferelation

$$\mathrm{Streu}_\alpha\left(\mathscr{Q}\right)\cdot\mathrm{Streu}_\alpha\left(\mathscr{P}\right) = \frac{\hbar}{2}.$$

## Aufgabe 2 – Das Wasserstoffatom und seine Eigenzustände

In der Vorlesung wurden das Wasserstoffatom und seine Eigenfunktionen $\Psi_{nlm}(r, \theta, \phi)$ besprochen. Im Folgenden wollen wir deren Eigenschaften genauer untersuchen.

(i) Nutzen Sie die Definition der Hauptquantenzahl $n$ aus der Vorlesung, zusammen mit der Bedingung für die Quadratintegrabilität der Radiallösungen $R_{nl}(r)$, um zu zeigen, dass $l < n$. Argumentieren sie nun, dass der Grad der Entartung für jedes Energieniveau $n^2$ ist.

(ii) Berechnen Sie die Normierung für die ersten drei Radialfunktionen, $R_{10}(r)$, $R_{20}(r)$ und $R_{21}(r)$.

(iii) Bestimmen Sie daraus die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit für $R_{10}(r)$ und $R_{21}(r)$. Plotten Sie beide gegeneinander und diskutieren Sie ihr Ergebnis.

(iv) Berechnen Sie den Erwartungswert von $\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1}$ für die ersten fünf Energieeigenzustände. Nutzen Sie Ihr Ergebnis um den Erwartungswert für $\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$ zu bestimmen, wobei $v$ die Geschwindigkeit des Elektrons ist. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.
(Hinweis: $E_n = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{2\hbar n^2}$.)

Die ersten Radialwellenfunktionen sind proportional zu

$$R_{10}(r) \sim \mathrm{e}^{-r}, \quad R_{20}(r) \sim \left(1 - \frac{r}{2}\right) \mathrm{e}^{-r/2}, \quad R_{21}(r) \sim r\mathrm{e}^{-r/2}.$$

## Aufgabe 3 – Störungstheorie ohne Spin

Nun betrachten wir das obige Wasserstoffatom in einem elektrischen und einem magnetischen Feld. Um die Rechnung zu vereinfachen, nehmen wir im Folgenden an, dass weder der Kern noch das Elektron Spin tragen (d.h. die Spin-Bahn Kopplung und wird vernachlässigt). Wir betrachten im Folgenden nur Zustände mit $n = 2$.

(i) Der Hamiltonoperator in Gegenwart eines magnetischen Feldes $\boldsymbol{B}$ in $z$-Richtung ist gegeben durch

$$\mathscr{H} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_e} - \frac{e^2}{r} + \frac{eB}{2m_e} L_z.$$

Berechnen Sie die Korrekturen der Energien $E_{nlm}$ für schwache Magnetfelder in erster Ordnung. Für welche Zustände wird die Entartung des $n = 2$ Niveaus aufgehoben?

(ii) Wiederholen Sie den obigen Vorgang für ein elektrisches Feld $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, also für $\mathscr{H}_{WW} = e\mathcal{E}z$. Werten Sie die Integrale über die radialen Funktionen dabei nicht explizit aus, sondern ersetzen Sie diese durch einen Parameter. Gleiches gilt für die Integrale über die Kugelflächenfunktionen, sofern sie nicht verschwinden.
*Hinweis: Die folgende Identität könnte hilfreich sein:*

$$\cos\theta \, Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,m} + \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1,m}.$$