Prof. Dr. Stefan Hofmann Wintersemester 2018/19

Übungen zur Quantenmechanik (T2)

Übungsblatt 2, Besprechung vom 25.10. – 29.10.

Aufgabe 1 – Kurzfragen

(i) Diskutieren Sie für folgende Experimente, ob Sie für eine Erklärung der Beobachtungen Quantenmechanik zur Rate ziehen müssen, oder ob Ihnen klassische Mechanik ausreicht:

- Rutherford-Experiment: Eine sehr dünne Goldfolie ($\sim$ 1000 Atome dick) wird mit α-Teilchen beschossen. Beobachtung: Die meisten α-Teilchen haben sehr kleine Ablenkwinkel, d.h. es gibt eine sehr schwache Ablenkung. Einige wenige Teilchen weisen starke Ablenkwinkel auf, auch $> \frac{\pi}{2}$ ist möglich. Finden Sie ein Modell, dass diese Atome und die Streuung beschreibt.
- Das Licht einer Lampe mit kontinuierlichem Sprektrum wird durch ein Wasserstoffgas geschickt und mit einem Spektrometer gemessen. Beobachtung: Aus dem kontinuierlichem Spektrum werden einzelne Frequenzen nicht detektiert. Können Sie dieses Experiment mit dem in (i) hergeleiteten Modell erklären?

(ii) Betrachten Sie die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, mit $a < b$, bezeichnet als

$$C^0([a, b]) \coloneqq \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ stetig}\},$$

versehen mit punktweiser Addition und skalarer Multiplikation, sowie einer Abbildung

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_a^b \mathrm{d}x\, p(x) f(x) g(x) \tag{1}$$

für eine positive, stetige Funktion $p : [a, b] \to \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass das Paar $(C^0([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ einen Prähilbertraum bildet.

(iii) Betrachten sie den Vektorraum der Polynome n-ten Grades, mit Koeffizienten aus einem Körper, versehen mit der üblichen Addition und Multiplikation mit einem Körperelement. Zeigen Sie, dass die Menge der Monome $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ eine Basis für diesen Vektorraum bildet.

Die nächsten Definitionen und Aussagen für Matrizen sollten bereits bekannt sein. Falls nicht, ist dies ein guter Zeitpunkt, diese zu wiederholen. Im Folgenden sei M eine reelle $n \times m$-Matrix, V und W seien endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume mit Dimension n und m.

(iv) Geben Sie die Definition für den Rang $\mathrm{rank}(M)$ einer Matrix M, sowie für den Kern $\ker(M)$ und das Bild $\mathrm{Im}(M)$ an.

(v) Zeigen Sie den Rangsatz

$$\dim(V) = \mathrm{rank}(M) + \dim(\ker(M)).$$

Die folgenden Schritte können dabei hilfreich sein:

a) Zeigen Sie, dass $\ker(M)$ ein Unterraum von V ist.

b) Wählen Sie eine Basis $\{v_1, v_2 \ldots, v_{\dim(\ker(M))}\}$ von $\ker(M)$ und eine Basis $\{w_1, w_2 \ldots, w_{\dim(\mathrm{Im}(M))}\}$ von W und konstruieren Sie daraus eine Basis für V.

c) Schließen Sie daraus den Rangsatz.

(vi) Sind diese Definitionen und Aussagen von der darstellenden Matrix der zugrunde liegenden linearen Abbildung abhängig?

Aufgabe 2 – Aschenputtel vs. optischer Filter

In der Vorlesung haben Sie auf der Suche nach Analogien für das Stern-Gerlach-Experiment zwei verschiedene Arten von „Filtern“ kennengelernt. Diese wollen wir nun näher untersuchen und insbesondere die konzeptionellen Unterschiede dieser Konzepte verdeutlichen.
Zunächst betrachten wir Aschenputtel zusammen mit einer endlichen Menge von Körnern, wobei jedes der Körner einer eindeutigen Farbe zugeordnet wird, hellrot, dunkelrot, hellblau oder dunkelblau. Aschenputtel besitzt die Fähigkeit, alle Körner der jeweils gleichen Farbe einzusammeln.

(i) Stellen Sie sich zunächst vor, Aschenputtel sammelt alle hellroten Körner ein. Wie verändert sich die Menge der übrigen Körner, wenn sie versucht, aus der verbleibenden Menge an Körnern erneut alle hellroten Körner zu entfernen?

(ii) Betrachten Sie nun eine Kette aus zwei Aschenputtels, dargestellt durch $\mathcal{A}_b \circ \mathcal{A}_r$. Das erste Aschenputtel ($\mathcal{A}_r$) entnimmt alle hellroten Körner, während das zweite Aschenputtel ($\mathcal{A}_b$) alle hellblauen Körner einsammelt.
Welche Körner bleiben am Ende übrig? Was passiert wenn Sie die Reihenfolge der Aschenputtels vertauschen, d.h. im Fall $\mathcal{A}_r \circ \mathcal{A}_b$?

(iii) Gegeben sei nun eine Kette aus drei Aschenputtels, $\mathcal{A}_b \circ \mathcal{A}_{\bar{b}} \circ \mathcal{A}_r$. Hier bezeichne $\mathcal{A}_{\bar{b}}$ ein Aschenputtel, das alle dunkelblauen Körner einsammelt. Welches Ergebnis erwarten Sie? Was passiert wenn Sie die Reihenfolge der Aschenputtels beliebig vertauschen?

(iv) *Bonus*: Modellieren Sie Aschenputtel als Abbildung $\mathcal{A}_b$, die auf die Menge der Körner wirkt. Welchen Eigenschaften dieser Funktion entsprechen Ihre bisherigen Ergebnisse?

Nun wenden wir uns den optischen Filtern zu. Um deren Wirkungsweise zu verstehen, erinnern Sie sich zunächst daran, dass jede elektromagnetische Welle durch zwei Vektoren $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{k}$ charakterisiert werden kann. Hierbei gibt $\boldsymbol{E}$ die Schwingungsrichtung des elektrischen Feldes an. Darüber hinaus ist $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{k}$, wobei $\boldsymbol{k}$ die Ausbreitungsrichtung der Welle bezeichne. Im Folgenden wählen wir unser Koordinatensystem so, dass $\boldsymbol{k} \sim \boldsymbol{e}_3$ gelte, d.h. $\boldsymbol{E}$ liege in der $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$-Ebene.
Ein $\boldsymbol{v}$-Filter (mit $||\boldsymbol{v}|| = 1$) wirkt nun auf die elektromagnetische Welle, indem er lediglich denjenigen Anteil der Welle, der parallel zu $\boldsymbol{v}$ schwingt, durchlässt. In der Vorlesung wurde argumentiert, dass sich dies mathematisch durch die folgende Abbildung darstellen lässt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\boldsymbol{v}} : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 &\to \mathbf{R}^3 \\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{E}) &\mapsto \mathcal{F}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{E}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{E} \rangle \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

Wir wollen nun untersuchen, inwiefern sich diese Vorrichtung von Aschenputtel unterscheidet.

(v) Stellen Sie sich nun vor, Sie schicken eine elektromagnetische Welle, charakterisiert durch den Vektor $\boldsymbol{E}_0$, durch einen optischen Filter $\mathcal{F}_{\boldsymbol{e}_1}$. Was passiert wenn Sie die austretende Welle erneut durch den selben Filter schicken? Überprüfen Sie ihre Antwort, indem Sie $\mathcal{F}_{\boldsymbol{e}_1} \circ \mathcal{F}_{\boldsymbol{e}_1}(\boldsymbol{E}_0)$ explizit berechnen.

(vi) Was passiert, wenn Sie statt des zweiten $\boldsymbol{e}_1$-Filters einen $\boldsymbol{e}_2$-Filter verwenden?
Argumentieren Sie zunächst mit Hilfe einer Skizze und überprüfen Sie Ihre Antwort anschließend indem Sie auch $\mathcal{F}_{\boldsymbol{e}_2} \circ \mathcal{F}_{\boldsymbol{e}_1}(\boldsymbol{E}_0)$ berechnen.

(vii) Abschließend wollen wir die Dreierkette $\mathcal{F}_{\boldsymbol{e}_2} \circ \mathcal{F}_{\boldsymbol{v}} \circ \mathcal{F}_{\boldsymbol{e}_1}$ betrachten. Hierbei bezeichne $\boldsymbol{v}$ einen beliebigen Einheitsvektor mit $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1 \rangle = \cos(\alpha)$.
Berechnen Sie $\mathcal{F}_{\boldsymbol{e}_2} \circ \mathcal{F}_{\boldsymbol{v}} \circ \mathcal{F}_{\boldsymbol{e}_1}(\boldsymbol{E}_0)$ und verdeutlichen Sie ihr Ergebnis durch eine weitere Skizze. Was passiert, wenn Sie die Reihenfolge der Filter verändern?

(viii) Vergleichen Sie nun Ihre Ergebnisse für die optischen Filter mit denen für Aschenputtel. Konzentrieren Sie sich dabei insbesondere auf die Frage, wie die Zwischenschaltung des $\boldsymbol{v}$-Filters eine $\boldsymbol{e}_2$-Komponente des elektrischen Feldes erzeugt. Warum ist dies für die Körner durch die Zwischenschaltung eines Aschenputtels nicht möglich?

Aufgabe 3 – Lineare Algebra, Teil II

In dieser Aufgabe versuchen wir, einige bekannte Konzepte über Matrizen auf die zugrunde liegenden linearen Abbildungen zu abstrahieren. Der Formalismus basierend auf diesen Abbildungen wird für die spätere Vorlesung sehr wichtig, da wir diesen relativ einfach auf unendlich-dimensionale Vektorräume verallgemeinern können.
Zunächst werden wir einige wichtige Definitionen und Aussagen über Matrizen wiederholen.
Im Folgenden seien $(V, +, \cdot)$, $(W, \oplus, \odot)$ zwei endlich-dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorräume und

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{C}$$

eine Abbildung.

(i) Welche Eigenschaften muss $\langle \cdot, \cdot \rangle$ erfüllen, um ein Skalarprodukt auf V zu definieren?

(ii) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ jeder n-dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorraum V isomorph zum $\mathbb{C}^n$ versehen mit der Standard-Vektorraumstruktur ist.

Eine *lineare Abbildung* zwischen zwei Vektorräumen V, W ist eine Abbildung $\mathscr{A} \colon V \to W$ so dass

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}\, \forall v, w \in V \colon \mathscr{A}(\alpha \cdot v + \beta \cdot w) = \alpha \odot \mathscr{A}(v) \oplus \beta \odot \mathscr{A}(w).$$

Lineare Abbildungen sind Vektorraum-Homomorphismen, da sie die Strukturen der Vektorräume, d.h. die Vektoraddition und die skalare Multiplikation, erhalten. Sie sind zur Klassifizierung von Vektorräumen sehr nützlich, und spielen auch in der Quantenmechanik eine tragende Rolle.

(iii) Zeigen Sie, dass die Wirkung einer beliebigen linearen Abbildung $\mathscr{A} \colon V \to W$ durch eine Matrixmultiplikation repräsentiert werden kann.

In der Quantenmechanik interessieren uns vor allem Endomorphismen $\mathscr{O} \colon V \to V$, welche wir als *lineare Operatoren* bezeichnen. Diese können wir durch quadratische Matrizen darstellen. Wir wiederholen nun einige wichtige Definitionen für Matrixoperationen und versuchen diese auf die zugrunde liegenden linearen Abbildungen zu verallgemeinern.

(iv) Geben Sie die Definitionen für eine hermitesche Matrix T, sowie für eine unitäre Matrix U an. Wie hängen diese Definitionen mit dem inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zusammen? Nutzen Sie diesen Zusammenhang, um eine selbst-adjungierte lineare Abbildung $\mathscr{T}$ bezüglich des inneren Produktes, d.h. eine Abbildung, die durch eine hermitesche Matrix repräsentiert wird, zu definieren. Was ist die Bedingung für eine unitäre Abbildung $\mathscr{U}$?

(v) Definieren Sie Eigenwerte und -vektoren für eine quadratische Matrix M. Sind diese von der Wahl der Basis des Vektorraumes abhängig?
Verallgemeinern Sie die Definitionen für einen linearen Operator $\mathscr{M}$.