Prof. Dr. Stefan Hofmann Wintersemester 2018/19

Übungen zur Quantenmechanik (T2)

Übungsblatt 2, Besprechung vom 25.10. – 29.10.

Aufgabe 1 – Kurzfragen

(i) Diskutieren Sie für folgende Experimente, ob Sie für eine Erklärung der Beobachtungen Quantenmechanik zur Rate ziehen müssen, oder ob Ihnen klassische Mechanik ausreicht:

- Rutherford-Experiment: Eine sehr dünne Goldfolie ($\sim$ 1000 Atome dick) wird mit α-Teilchen beschossen. Beobachtung: Die meisten α-Teilchen haben sehr kleine Ablenkwinkel, d.h. es gibt eine sehr schwache Ablenkung. Einige wenige Teilchen weisen starke Ablenkwinkel auf, auch $> \frac{\pi}{2}$ ist möglich. Finden Sie ein Modell, dass diese Atome und die Streuung beschreibt.
- Das Licht einer Lampe mit kontinuierlichem Sprektrum wird durch ein Wasserstoffgas geschickt und mit einem Spektrometer gemessen. Beobachtung: Aus dem kontinuierlichem Spektrum werden einzelne Frequenzen nicht detektiert. Können Sie dieses Experiment mit dem in (i) hergeleiteten Modell erklären?

(ii) Betrachten Sie die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, mit $a < b$, bezeichnet als

$$C^0([a, b]) := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ stetig}\},$$

versehen mit punktweiser Addition und skalarer Multiplikation, sowie einer Abbildung

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b \mathrm{d}x\, p(x) f(x) g(x) \tag{1}$$

für eine positive, stetige Funktion $p : [a, b] \to \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass das Paar $(C^0([a, b]), \langle\cdot, \cdot\rangle)$ einen Prähilbertraum bildet.

(iii) Betrachten sie den Vektorraum der Polynome n-ten Grades, mit Koeffizienten aus einem Körper, versehen mit der üblichen Addition und Multiplikation mit einem Körperelement. Zeigen Sie, dass die Menge der Monome $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ eine Basis für diesen Vektorraum bildet.

Die nächsten Definitionen und Aussagen für Matrizen sollten bereits bekannt sein. Falls nicht, ist dies ein guter Zeitpunkt, diese zu wiederholen. Im Folgenden sei M eine reelle $m \times n$-Matrix, V und W seien endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume mit Dimension n und m.

(iv) Geben Sie die Definition für den Rang $\mathrm{rank}(M)$ einer Matrix M, sowie für den Kern $\ker(M)$ und das Bild $\mathrm{Im}(M)$ an.

(v) Zeigen Sie den Rangsatz

$$\dim(V) = \mathrm{rank}(M) + \dim(\ker(M)).$$

Die folgenden Schritte können dabei hilfreich sein:

a) Zeigen Sie, dass $\ker(M)$ ein Unterraum von V ist.

b) Wählen Sie eine Basis $\{v_1, v_2 \ldots, v_{\dim(\ker(M))}\}$ von $\ker(M)$ und eine Basis $\{w_1, w_2 \ldots, w_{\dim(\mathrm{Im}(M))}\}$ von W und konstruieren Sie daraus eine Basis für V.

c) Schließen Sie daraus den Rangsatz.

(vi) Sind diese Definitionen und Aussagen von der darstellenden Matrix der zugrunde liegenden linearen Abbildung abhängig?

Solution

(i) a) The Rutherford experiment can be explained by classical, elastic Coulomb scattering (cf. e.g. Landau Lifshitz I). We model an atom as a very small positive mass surrounded by electrons. The α-particles then scatter only because of the positively charged nucleus and we obtain similar scattering cross-sections.

b) With this Rutherford model, there should be continuous absorption lines, since the energy of the electron can take any value $E \in [E_{\min}, 0]$. Furthermore, the classical atom modelled in (i) would decay in a very small time-frame ($\sim 10^{-11}$ s) due to synchrotron radiation of the electron. Hence we must impose some form of 'allowed' orbits, which can only excite and decay into each other. This leads to the Bohr-atom.

(ii) Clearly $C^0([a,b])$ with pointwise addition and scalar multiplication is a vector space (e.g. as a subspace of $\mathscr{L}^2$ from the last sheet). A pre-Hilbert space is a vector space with an inner product, i.e. we need to check if $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is positive definite, symmetric and bilinear.

Linearity and symmetry follow immediately from the definition. For positive-definiteness, first note that we have

$$\langle f, f \rangle = \int_{[a,b]} \mathrm{d}x \, p(x) f(x)^2.$$

Since $p(x)$ and $f(x)^2$ are positive, continuous functions, so is their product, and the integral of a positive continuous function is positive. This can be seen from the observation that for a positive, continuous f, there exists $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ such that $f(x) \geq \varepsilon$ for all $x \in [a,b]$. With this, we have

$$\int_{[a,b]} \mathrm{d}x f(x) \geq \varepsilon \lambda([a,b]) > 0,$$

where $\lambda([a,b]) = b - a > 0$ is the Lebesgue-measure of the interval. Note that this time, we do not need to worry about functions being zero almost everywhere, since we deal with continuous functions.

(iii) We first check that the polynomials of degree n over a field $\mathbb{K}$ form a vector space. A generic polynomial is defined as $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$. We define addition of two polynomials p and q with coefficients α_i and β_i, respectively, as

$$(p+q)(x) = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)x + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)x^n,$$

and scalar multiplication for $\lambda \in \mathbb{K}$ as

$$(\lambda \cdot p)(x) = \lambda\alpha_0 + \lambda\alpha_1 x + \cdots + \lambda\alpha_n x^n.$$

Clearly, the polynomials form a commutative group, with the neutral element given by the 0-polynomial with $\alpha_i = 0$ for all i and the inverse element given by $-p$, with coefficients $-\alpha_i$. The other four properties also follow immediately from the associativity and distributivity of the field operations.

A basis is a linearly independent set of vectors that spans the whole vector space. We first show inductively that the set $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ is linearly independent. Consider for $n = 1$

$$\lambda_0 + \lambda_1 x = 0.$$

Since this holds for all x, we can, in particular, consider $x = 0$ to find $\lambda_0 = 0$. For any other value of x, this immediately implies $\lambda_1 = 0$.

Now consider $n \to n+1$, i.e. assume that $\{1, x, \ldots, x^n\}$ is linearly independent. We have

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n + \lambda_{n+1} x^{n+1} = 0.$$

Again, evaluating at $x = 0$ gives $\lambda_0 = 0$. Now we factorise the polynomial to obtain

$$x(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n x^{n-1} + \lambda_{n+1} x^n) = 0,$$

but the expression inside the bracket is linearly independent, giving $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n+1} = 0$. To see that they span the vector space, note that for each polynomial p with coefficients α_i, the expansion in this basis is simply given by these coefficients.

(iv) Consider a matrix M representing a linear map $A\colon V \to W$. The rank of a matrix is the number of linearly independent column vectors, i.e. the dimension of the image of the linear map. The kernel is the set of vectors (in the domain) that get mapped onto 0, and the image is simply $M(V)$, a subset of the target space.

(v) **Step 1: The kernel is a subspace of V.**
First note that for a Matrix, clearly $0 \in \ker(M)$. With this, it is easy to see that by linearity of M, the kernel is subspace of V, and thus it has a basis $\{v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_{\dim(\ker(M))}\}$.
Step 2: The image is a subspace of W.
By a similar argument as for the kernel, as $M(0) = 0$ is in the image of M, we conclude by linearity that $\mathrm{Im}(M)$ is a subspace of W. Thus, it also has a basis $\{w_1,\, w_2,\, \ldots,\, w_{\dim(\mathrm{Im}(M))}\}$.
Step 3: Construct a basis for V.
Step 3.1: Basis candidate.
Now consider the preimage of this $\{w_i\}$ basis, denoted by $\{u_1, u_2, \ldots, u_{\dim(\mathrm{Im}(M))}\}$, such that $M(u_i) = w_i$. By linearity of M, this set is linearly independent, but we give the argument regardless.
Step 3.2: Linear independence.
Consider $r = \dim\ker M$, $s = \dim\mathrm{Im}\, M$

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_s u_s = 0.$$

Applying M gives

$$\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_s w_s = 0,$$

from which we conclude that $\beta_1 = \cdots = \beta_s = 0$ since they form a basis. Using this, we also obtain $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$, since the v_i are linearly independent. So the set is linearly independent.
Step 3.3: Spanning property.
Consider a vector $v \in V$. Suppose the image of v is given by

$$Mv = \beta_1 w_1 + \ldots \beta_s w_s = M(\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_s u_s).$$

Then, by linearity, we know that $v-(\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_s u_s)$ is in the kernel of M, and thus has an expansion

$$v - (\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_s u_s) = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r,$$

from which we conclude that

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_s u_s.$$

Step 4: Derive rank theorem.
This splitting of the basis of V into $\{v_1, \ldots, v_{\dim(\ker(M))}, u_1, \ldots, u_{\dim \mathrm{Im}(W)}\}$ now immediately implies the rank theorem, namely

$$\dim(V) = \dim(\ker(M)) + \dim(\mathrm{Im}(M)) = \dim(\ker(M)) + \mathrm{rank}(M).$$

(vi) All these notions do not depend on the representation, but only on the underlying linear map.

Aufgabe 2 – Aschenputtel vs. optischer Filter

In der Vorlesung haben Sie auf der Suche nach Analogien für das Stern-Gerlach-Experiment zwei verschiedene Arten von „Filtern" kennengelernt. Diese wollen wir nun näher untersuchen und insbesondere die konzeptionellen Unterschiede dieser Konzepte verdeutlichen.
Zunächst betrachten wir Aschenputtel zusammen mit einer endlichen Menge von Körnern, wobei jedes der Körner einer eindeutigen Farbe zugeordnet wird, hellrot, dunkelrot, hellblau oder dunkelblau. Aschenputtel besitzt die Fähigkeit, alle Körner der jeweils gleichen Farbe einzusammeln.

(i) Stellen Sie sich zunächst vor, Aschenputtel sammelt alle hellroten Körner ein. Wie verändert sich die Menge der übrigen Körner, wenn sie versucht, aus der verbleibenden Menge an Körnern erneut alle hellroten Körner zu entfernen?

(ii) Betrachten Sie nun eine Kette aus zwei Aschenputtels, dargestellt durch $\mathcal{A}_b \circ \mathcal{A}_r$. Das erste Aschenputtel ($\mathcal{A}_r$) entnimmt alle hellroten Körner, während das zweite Aschenputtel ($\mathcal{A}_b$) alle hellblauen Körner einsammelt.
Welche Körner bleiben am Ende übrig? Was passiert wenn Sie die Reihenfolge der Aschenputtels vertauschen, d.h. im Fall $\mathcal{A}_r \circ \mathcal{A}_b$?

(iii) Gegeben sei nun eine Kette aus drei Aschenputtels, $\mathcal{A}_b \circ \mathcal{A}_{\bar{b}} \circ \mathcal{A}_r$. Hier bezeichne $\mathcal{A}_{\bar{b}}$ ein Aschenputtel, das alle dunkelblauen Körner einsammelt. Welches Ergebnis erwarten Sie? Was passiert wenn Sie die Reihenfolge der Aschenputtels beliebig vertauschen?

(iv) *Bonus*: Modellieren Sie Aschenputtel als Abbildung $\mathcal{A}_b$, die auf die Menge der Körner wirkt. Welchen Eigenschaften dieser Funktion entsprechen Ihre bisherigen Ergebnisse?

Nun wenden wir uns den optischen Filtern zu. Um deren Wirkungsweise zu verstehen, erinnern Sie sich zunächst daran, dass jede elektromagnetische Welle durch zwei Vektoren $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{k}$ charakterisiert werden kann. Hierbei gibt $\boldsymbol{E}$ die Schwingungsrichtung des elektrischen Feldes an. Darüber hinaus ist $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{k}$, wobei $\boldsymbol{k}$ die Ausbreitungsrichtung der Welle bezeichne. Im Folgenden wählen wir unser Koordinatensystem so, dass $\boldsymbol{k} \sim \boldsymbol{e}_3$ gelte, d.h. $\boldsymbol{E}$ liege in der $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$-Ebene.
Ein $\boldsymbol{v}$-Filter (mit $||\boldsymbol{v}|| = 1$) wirkt nun auf die elektromagnetische Welle, indem er lediglich denjenigen Anteil der Welle, der parallel zu $\boldsymbol{v}$ schwingt, durchlässt. In der Vorlesung wurde argumentiert, dass sich dies mathematisch durch die folgende Abbildung darstellen lässt:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\boldsymbol{v}} : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 &\to \mathbf{R}^3 \\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{E}) &\mapsto \mathcal{F}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{E}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{E} \rangle \boldsymbol{v}\end{aligned}$$

Wir wollen nun untersuchen, inwiefern sich diese Vorrichtung von Aschenputtel unterscheidet.

(v) Stellen Sie sich nun vor, Sie schicken eine elektromagnetische Welle, charakterisiert durch den Vektor $\boldsymbol{E}_0$, durch einen optischen Filter $\mathcal{F}_{\boldsymbol{e}_1}$. Was passiert wenn Sie die austretende Welle erneut durch den selben Filter schicken? Überprüfen Sie ihre Antwort, indem Sie $\mathcal{F}_{\boldsymbol{e}_1} \circ \mathcal{F}_{\boldsymbol{e}_1}(\boldsymbol{E}_0)$ explizit berechnen.

(vi) Was passiert, wenn Sie statt des zweiten $\boldsymbol{e}_1$-Filters einen $\boldsymbol{e}_2$-Filter verwenden?
Argumentieren Sie zunächst mit Hilfe einer Skizze und überprüfen Sie Ihre Antwort anschließend indem Sie auch $\mathcal{F}_{\boldsymbol{e}_2} \circ \mathcal{F}_{\boldsymbol{e}_1}(\boldsymbol{E}_0)$ berechnen.

(vii) Abschließend wollen wir die Dreierkette $\mathcal{F}_{\boldsymbol{e}_2} \circ \mathcal{F}_{\boldsymbol{v}} \circ \mathcal{F}_{\boldsymbol{e}_1}$ betrachten. Hierbei bezeichne $\boldsymbol{v}$ einen beliebigen Einheitsvektor mit $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1 \rangle = \cos(\alpha)$.
Berechnen Sie $\mathcal{F}_{\boldsymbol{e}_2} \circ \mathcal{F}_{\boldsymbol{v}} \circ \mathcal{F}_{\boldsymbol{e}_1}(\boldsymbol{E}_0)$ und verdeutlichen Sie ihr Ergebnis durch eine weitere Skizze. Was passiert, wenn Sie die Reihenfolge der Filter verändern?

(viii) Vergleichen Sie nun Ihre Ergebnisse für die optischen Filter mit denen für Aschenputtel. Konzentrieren Sie sich dabei insbesondere auf die Frage, wie die Zwischenschaltung des $\boldsymbol{v}$-Filters eine $\boldsymbol{e}_2$-Komponente des elektrischen Feldes erzeugt. Warum ist dies für die Körner durch die Zwischenschaltung eines Aschenputtels nicht möglich?

Solution

Remark Thomas: We don't expect students to solve this exercise in a fancy mathematical way. A simple 'Nothing happens' is completely fine.

(i) Aschenputtel $\mathcal{A}_r$ removes all light-red grains physically from the set of grains, so a second application of $\mathcal{A}_r$ does not change the set any further.
We denote the set of all grains by K, and the set of light-red, dark-red, light-blue and dark-blue by r, $\bar{r}$, b, $\bar{b}$, respectively. Since every grain is of precisely one colour, we can define an equivalence relation $k_i \sim k_j :\Leftrightarrow k_i$ and k_j are of the same colour. This gives a partition into the disjoint subsets

$$K = r \cup \bar{r} \cup b \cup \bar{b}.$$

Aschenputtel filters out all light red grains in the first stage, i.e. they are physically removed from the set of possible grains, we are left with $K - r$, so in the second stage the remaining set of grains does not change, it is still $K - r$.

(ii) The first Aschenputtel gives $\mathcal{A}_r : K \to K - r$, the second one $\mathcal{A}_b : K \to K - b$. In sequence, we obtain the set $(K - r) - b$, i.e. we are left with dark-red and dark-blue grains. The order of Aschenputtels does not matter, since

$$(K - r) - b = (K - b) - r,$$

as $(K - r) - b = \{x : x \in K \wedge x \notin r \wedge x \notin b\}$ and $\wedge$ is symmetric.

(iii) In this sequencing, we are left with $K - r - \bar{b} - b$, again, the order does not matter.

(iv) To model this properly, we can e.g. consider as the 'state space' K a Cartesian product

$$K = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0,$$

where we identify the entries with light-red, dark-red, light-blue and dark-blue, respectively. In other words, a set consisting of two light-red grains, one light-blue grain, and no others, would be represented by the 'state' $|\,2, 0, 1, 0\rangle = (2, 0, 1, 0)$. We can then define the Aschenputtel operators as the mappings

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_r &: K \to K \\ (N_r, N_{\bar{r}}, N_b, N_{\bar{b}}) &\mapsto (0, N_{\bar{r}}, N_b, N_{\bar{b}}) \end{aligned}$$

and for the other colours analogously. This captures all the interesting features of this experiment.

(v) In the following, we suppress vector notation. After applying $\mathcal{F}_{e_1}$ to E_0, we obtain $\langle e_1, E_0\rangle e_1 = (E_0)_1 e_1$. Applying the filter again, we get after using $\langle e_1, e_1\rangle = 1$ the same vector, since

$$\langle e_1, \langle e_1, E_0\rangle e_1\rangle e_1 = \langle e_1, E_0\rangle\langle e_1, e_1\rangle e_1.$$

(vi) If we choose as second filter e_2, we obtain

$$\langle e_2, \langle e_1, E_0\rangle e_1\rangle e_2 = \langle e_1, E_0\rangle\langle e_2, e_1\rangle e_2 = 0,$$

as they are orthogonal to each other.

(vii) We compute

$$\begin{aligned} E_{2v1} &= \langle e_2, E_{v1}\rangle e_2 \\ &= \langle e_2, \langle v, E_1\rangle v\rangle e_2 \\ &= \langle e_2, \langle v, \langle e_1, E_0\rangle e_1\rangle v\rangle e_2 \\ &= \langle e_1, E_0\rangle\langle v, e_1\rangle\langle e_2, v\rangle e_2 \\ &= \cos(\alpha)\langle e_1, E_0\rangle\langle e_2, v\rangle e_2 \end{aligned}$$

which is not only non-zero in general, but also different from other permutations, as can be best seen by checking the direction of this vector.

(viii) We see that projecting onto e_1 gives us a state proportional to e_1. If we now project onto v, we have to expand e_1 in terms of v and keep only the contribution parallel to v. Doing the same again for e_2 requires us now to expand v in terms of e_1, e_2 and suddenly we have a contribution parallel to e_2. In other words, even though we projected out the contribution $\sim e_2$ in the first round, we can recover a parallel part with an intermediate v-filter. Compare this to the Aschenputtel constructed above: After projecting out the light-red grains, we can throw in an intermediate Aschenputtel, but it will not be able to 'add' any new light-red grains to the set of grains.

Aufgabe 3 – Lineare Algebra, Teil II

In dieser Aufgabe versuchen wir, einige bekannte Konzepte über Matrizen auf die zugrunde liegenden linearen Abbildungen zu abstrahieren. Der Formalismus basierend auf diesen Abbildungen wird für die spätere Vorlesung sehr wichtig, da wir diesen relativ einfach auf unendlich-dimensionale Vektorräume verallgemeinern können.
Zunächst werden wir einige wichtige Definitionen und Aussagen über Matrizen wiederholen.
Im Folgenden seien $(V, +, \cdot)$, $(W, \oplus, \odot)$ zwei endlich-dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorräume und

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{C}$$

eine Abbildung.

(i) Welche Eigenschaften muss $\langle \cdot, \cdot \rangle$ erfüllen, um ein Skalarprodukt auf V zu definieren?

(ii) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ jeder n-dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorraum V isomorph zum $\mathbb{C}^n$ versehen mit der Standard-Vektorraumstruktur ist.

Eine *lineare Abbildung* zwischen zwei Vektorräumen V, W ist eine Abbildung $\mathscr{A} \colon V \to W$ so dass

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}\, \forall v, w \in V \colon \mathscr{A}(\alpha \cdot v + \beta \cdot w) = \alpha \odot \mathscr{A}(v) \oplus \beta \odot \mathscr{A}(w).$$

Lineare Abbildungen sind Vektorraum-Homomorphismen, da sie die Strukturen der Vektorräume, d.h. die Vektoraddition und die skalare Multiplikation, erhalten. Sie sind zur Klassifizierung von Vektorräumen sehr nützlich, und spielen auch in der Quantenmechanik eine tragende Rolle.

(iii) Zeigen Sie, dass die Wirkung einer beliebigen linearen Abbildung $\mathscr{A} \colon V \to W$ durch eine Matrixmultiplikation repräsentiert werden kann.

In der Quantenmechanik interessieren uns vor allem Endomorphismen $\mathscr{O} \colon V \to V$, welche wir als *lineare Operatoren* bezeichnen. Diese können wir durch quadratische Matrizen darstellen. Wir wiederholen nun einige wichtige Definitionen für Matrixoperationen und versuchen diese auf die zugrunde liegenden linearen Abbildungen zu verallgemeinern.

(iv) Geben Sie die Definitionen für eine hermitesche Matrix T, sowie für eine unitäre Matrix U an. Wie hängen diese Definitionen mit dem inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zusammen? Nutzen Sie diesen Zusammenhang, um eine selbst-adjungierte lineare Abbildung $\mathscr{T}$ bezüglich des inneren Produktes, d.h. eine Abbildung, die durch eine hermitesche Matrix repräsentiert wird, zu definieren. Was ist die Bedingung für eine unitäre Abbildung $\mathscr{U}$?

(v) Definieren Sie Eigenwerte und -vektoren für eine quadratische Matrix M. Sind diese von der Wahl der Basis des Vektorraumes abhängig?
Verallgemeinern Sie die Definitionen für einen linearen Operator $\mathscr{M}$.

Solution

(i) It has to be positive-definite, linear in the second slot and satisfy the complex-conjugate symmetry.

(ii) To show that V is isomorphic to $\mathbb{C}^n$, we construct the isomorphism T explicitly.
Step 1: Construct the linear map by action on the basis vectors.
We choose a basis $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ of V and the standard basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ of $\mathbb{C}^n$. We then define $T[v_i] = e_i$.
Step 2: Perform linear completion.
For any vector $v \in V$, there exists a unique expansion in $\{v_i\}_{i\in\mathscr{I}(n)}$, given by

$$v = \sum_{i\in\mathscr{I}(n)} \alpha_i v_i,$$

for some complex numbers α_i. Since the map is linear, we can compute the resulting vector by

$$T(v) = T(\sum_i \alpha_i v_i) = \sum_i \alpha_i T(v_i) = \sum_i \alpha_i e_i$$

which gives us the full linear map.

(iii) **Step 1: Choose bases and map to $\mathbb{C}^n$.**
We choose a basis $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ of V and $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ of W, and use the isomorphism defined above to identify $V \simeq \mathbb{C}^n$, $W \simeq \mathbb{C}^m$.
Step 2: Consider action on basis vectors.
We consider the action of the map A on the basis vector v_j. We have

$$A(v_j) = \sum_j a_{ij} w_i$$

for some coefficients a_{ij}. We now use these coefficients to define a matrix $M\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, precisely with the prescription $M_{ij} = a_{ij}$, by identifying $v_i \sim e_i$ and $w_j \sim e_j$ with the respective standard basis vectors.

(iv) A matrix is Hermitian if $T^\dagger = \overline{(T^T)} = T$ and unitary if $U^\dagger = U^{-1}$. This is related to swapping the matrix from one entry to the other in the inner product. In general, we define a symmetric operator $\mathscr{O}$ to satisfy

$$\forall v, w \in V\colon \langle v, \mathscr{O}w\rangle = \langle \mathscr{O}v, w\rangle$$

and a unitary operator $\mathscr{U}$

$$\forall v, w \in V\colon \langle v, w\rangle = \langle \mathscr{U}v, \mathscr{U}w\rangle.$$

In the case of the standard inner product on $\mathbb{C}^n$, this is equivalent to the definitions of Hermitian and unitary matrices.

(v) An eigenvector v corresponding to an eigenvalue λ satisfies

$$Av - \lambda v = 0$$

This does not depend on the choice of basis, since under a similarity transform, we have

$$S^{-1}ASS^{-1}v - \lambda S^{-1}v = 0.$$

Hence these definitions generalise naturally to linear maps.