Übungen zur Quantenmechanik (T2)

Übungsblatt 3, Besprechung vom 01.11. – 08.11.

Aufgabe 1 – Kurzfragen

(i) Ein Ket-Vektor $|\,\alpha\rangle$ kann in einer Orthonormalbasis $\{\left|\, a^i \right\rangle\}_{i\in\mathscr{I}}$ durch einen Spaltenvektor mit Komponenten $\left\langle a^i \,|\, \alpha \right\rangle$ dargestellt werden. Überlegen Sie sich, wie Sie folgende Objekte in Matrix-Schreibweise notieren können: $\left\langle a^j \,|\, X \,|\, a^i \right\rangle$, $\langle \beta\,|$, $\langle \beta \,|\, X$, $\langle \alpha \,|\, \beta\rangle$, $|\,\alpha\rangle\langle\beta\,|$.

(ii) Mit Ihrem Wissen über die Phänomenologie des Stern-Gerlach Experiments, was können Sie über $\left\langle S_3^+ \,|\, S_3^+ \right\rangle$, $\left\langle S_3^+ \,|\, S_3^- \right\rangle$, $\left\langle S_3^+ \,|\, S_1^- \right\rangle$ und $\left\langle S_3^- \,|\, S_1^- \right\rangle$ aussagen?

(iii) In der Vorlesung fanden wir für den Ket $\left|\, S_2^\pm \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\, S_3^+\right\rangle \pm i \left|\, S_3^- \right\rangle\right)$. Finden sie den anolgen Zustand in unserer Betrachtung der Polarisation in der Wellenoptik und skizzieren Sie diesen. Wie wird diese Polarisation bezeichnet? Müssen wir für diesen Zustand komplexe Koeffizienten und damit komplexe Zustände in der Wellenoptik erlauben?

Solution

(i) We use the representation of X in the basis $\{|\,a_i\rangle\}$ given by

$$X = \sum_i \sum_j \left|\, a^i \right\rangle \left\langle a^i \,|\, X \,|\, a^j \right\rangle \left\langle a^j \,\right| .$$

a) $\left\langle a^j \,|\, X \,|\, a^i \right\rangle = X_{ji}$, i.e. the ji-entry of the matrix representation of X as defined above. This is a *number.*

b) $\langle\beta\,|$ is the Hermitian adjoint corresponding to the ket $|\,\beta\rangle$, i.e. a row-vector with complex-conjugated entries.

c) $\langle\gamma\,| = \langle\beta\,|\,X$. We consider for this

$$\left\langle \gamma \,|\, a^i \right\rangle = \sum_j \left\langle \beta \,|\, a^j \right\rangle \left\langle a^j \,|\, X \,|\, a^i \right\rangle ,$$

i.e. it is a row-vector with coefficients $(\overline{\langle a^1 \,|\, \gamma\rangle}, \overline{\langle a^2 \,|\, \gamma\rangle}, \dots)$, the corresponding Hermitian adjoint to $|\,\gamma\rangle = X\,|\,\alpha\rangle$ (note that we take the adjoint of X to compute the action on a bra).

d) $\langle\alpha\,|\,\beta\rangle$ is the inner product of vectors $|\,\alpha\rangle, |\,\beta\rangle$, or row-vector $\langle\alpha\,|$ matrix product with column vector $|\,\beta\rangle$.

e) $|\,\alpha\rangle\langle\beta\,|$ is a matrix, where its elements in a basis $\{\alpha^i\}$ can be read off from the expansion

$$|\,\alpha\rangle\langle\beta\,| = \sum_i\sum_j \left|\, a^i\right\rangle \left\langle a^i \,|\, \alpha\right\rangle \left\langle \beta \,|\, a^j \right\rangle \left\langle a^j \,\right| = \sum_i\sum_j \left|\, a^i\right\rangle A_{ij} \left\langle a^j \,\right| .$$

(ii) a) $\left\langle S_3^+ \,|\, S_3^+ \right\rangle = 1$,

b) $\langle S_3^+ \,|\, S_3^- \rangle = 0$,

c) $|\langle S_3^+ \,|\, S_1^- \rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

d) $|\langle S_3^- \,|\, S_1^- \rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(iii) The analogous states to $|\, S_z, \pm\rangle$ were linearly polarised in the x- and y-direction. Correspondingly, to model $|\, S_x, \pm\rangle$ we could use the linearly polarised light in a x'- and y'-direction. We cannot use z-polarised light, since this is already the direction of propagation. To model $|\, S_y, \pm\rangle$, we have to consider a new polarisation, which is a non-trivial linear combination of either x or y-polarised light, but by symmetry, it should be of the same nature as the $|\, S_x, \pm\rangle$ states are in relation to $|\, S_z, \pm\rangle$. In wave optics, we can solve this by considering circularly polarised light, right- or left-handed. These waves consist of linearly polarised light in the x-direction plus linearly-polarised light in the y-direction, with a relative phase of $\frac{\pi}{2}$, i.e. we consider

$$\boldsymbol{E} = E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\boldsymbol{x}} \cos(kz - \omega t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\boldsymbol{y}} \cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}) \right).$$

To translate this into the Stern-Gerlach states, we realise that we can write a wave as a complex wave, and obtain for this state

$$\boldsymbol{E}_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\boldsymbol{x}} e^{ikz - i\omega t} + \frac{i}{\sqrt{2}} \hat{\boldsymbol{y}} e^{ikz - i\omega t}.$$

The corresponding state in SG would then be given by

$$|\, S_y, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\, S_z, +\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}} |\, S_z, -\rangle .$$

We see that we necessarily have to describe this experiment using a *complex* vector space. For the electromagnetic wave, this is not mandatory, since we have to take the real part at some point (complexification is simply a trick so we do not need to remember trigonometric identities). The final result in classical electrodynamics is always *real*, whereas the states in SG are by nature *complex*, necessitating a point of view that the quantum mechanical states are fundamentally unobservable.

Aufgabe 2 – Stern-Gerlach Experiment – Matrixnotation

In der Vorlesung haben Sie eine Beschreibung des Stern-Gerlach Experiments durch Zustandsvektoren und Projektoren kennengelernt. Ziel dieser Aufgabe ist es, Ihnen dabei zu helfen, Ihr Verständnis dieser Beschreibung zu vertiefen.
Um Ihnen den Zugang zu erleichtern, wollen wir hierfür zunächst die Ihnen vertrautere Darstellung mittels Spaltenvektoren und Matrizen verwenden. Wir wählen hierfür eine Basis, in der ein Teilchen mit der Eigenschaft „Spin–Projektion entlang der z–Achse Ihres Labors ist gleich $+1/2$“ durch den Vektor $(1,0)^T$ beschrieben wird, während $(0,1)^T$ einem Teilchen mit Spin-Projektion $-1/2$ entspricht.

(i) In der Vorlesung haben Sie das Konzept der Projektion kennengelernt. Finden Sie zwei Matrizen P_+ und P_-, die der Projektion eines Zustandes auf $(1,0)^T$ bzw. $(0,1)^T$ entsprechen, d.h. die wie folgt auf die Spin-Zustandsvektoren wirken:

$$P_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ sowie } P_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad P_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Überprüfen Sie, dass Ihre Lösungen aus Teilaufgabe (i) die in der Vorlesung gegebenen Eigenschaften eines Projektors besitzen.

(iii) Bestimmen Sie nun die Matrix S_z, welche die Spin-Projektion entlang der z-Achse ausliest. Da die Vektoren $(1,0)^T$ bzw. $(0,1)^T$ Zustände mit Spin-Projektion $\pm 1/2$ beschreiben muss für diese gelten

$$S_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sowie } S_z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Drücken Sie zunächst S_z durch P_+ und P_- aus. Finden Sie dann die explizite Matrixform von S_z.

(iv) Zeigen Sie, dass die Matrix S_z selbstadjungiert ist. In welchem Zusammenhang steht diese Eigenschaft mit den Eigenwerten? Zeigen Sie diesen Zusammenhang für eine beliebige selbstadjungierte Matrix.

(v) Betrachten Sie nun die beiden Matrizen

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Interpretieren Sie die Wirkung dieser Matrizen auf die oben genannten Spaltenvektoren.

Solution

(i) Matrices satisfying these properties are given by

$$P_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and by } P_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Orthogonal projections $\mathscr{P}$ onto a subset $M \subset \mathscr{H}$ satisfy $D(\mathscr{P}) = \mathscr{H}$, $W(\mathscr{P}) = M$ and $\mathscr{P} \circ \mathscr{P} = \mathscr{P}$. In our finite-dimensional case, this is easy to check. First note that $P_\pm^2 = P_\pm$. They are clearly defined on all of $\mathbb{C}^2$, and take values in $\operatorname{span}\{(1,0)^T\}$ and $\operatorname{span}\{(0,1)^T\}$, respectively.

(iii) We simply add the projectors times their eigenvalue and obtain

$$S_z = \frac{1}{2}P_+ - \frac{1}{2}P_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(iv) Clearly, S_z is Hermitian, i.e. self-adjoint wrt. the standard $\mathbb{C}^2$-inner product. The resulting eigenvalues are real. This follows from considering a Hermitian matrix A and an eigenvector $|\,\alpha\rangle$ and computing

$$0 = \langle \alpha \,|\, A \,|\, \alpha\rangle - \langle \alpha \,|\, A \,|\, \alpha\rangle = (\bar{a} - a)\,\langle \alpha \,|\, \alpha\rangle = \bar{a} - a,$$

from which we conclude $\bar{a} = a$, i.e. $a \in \mathbb{R}$.

(v) They satisfy $S_+\,|+\rangle = 0$, $S_+\,|-\rangle = |+\rangle$, $S_-\,|+\rangle = |-\rangle$, $S_-\,|-\rangle = 0$. These are so-called *raising* and *lowering* operators, that raise $|-\rangle$ to $|+\rangle$ and lower $|+\rangle$ to $|-\rangle$. These operators are extremely useful to study representations, as we will see in a later exercise.

Aufgabe 3 – Stern-Gerlach Experiment – Bra-Ket-Notation

Nun wollen wir die Überlegungen in Bra-Ket-Notation wiederholen. Der Vektor $(1,0)^T$ sei von nun an durch $|+\rangle$ bezeichnet, während $|-\rangle$ dem Vektor $(0,1)^T$ entspricht. Folglich gelte auch $\langle + \,|\, -\rangle = 0$ sowie $\langle \pm \,|\, \pm\rangle = 1$.

(i) Wiederholen Sie die Teilaufgaben (i) - (iv) von Aufgabe 2 in Bra-Ket-Notation.

(ii) Stellen Sie S_+ und S_- in Bra-Ket-Notation dar.

Im Folgenden werden wir die Bra-Ket-Notation benutzen, um auch die Spin-Projektion in x- und y-Richtung zu beschreiben. Der Zustand, dessen Spin-Projektion auf die x-Achse $+1/2$ bzw. $-1/2$ ist, werde mit $|+_x\rangle$ bzw. $|-_x\rangle$ bezeichnet.

(iii) Stellen Sie die Matrix S_x durch die Projektionsoperatoren $|+_x\rangle\langle +_x|$ und $|-_x\rangle\langle -_x|$ dar.

(iv) Welche Konsequenz hat die Beobachtung, dass ein Teilchen im Zustand $|+_x\rangle$ bei Messung der Spin-Komponente in z-Richtung mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Werte $+1/2$ und $-1/2$ ergibt, für den Wert von $|\langle + \,|\, +_x\rangle|$ und $|\langle - \,|\, +_x\rangle|$? Nutzen Sie dies, um den Vektor $|+_x\rangle$ in der z-Basis zu entwickeln und verwenden Sie die Freiheit eines beliebigen globalen Phasenfaktors, um etwa die $|+_x\rangle$-Komponente reel zu wählen. (Ihr Ergebnis sollte dann noch einen freien Parameter enthalten.) Gehen Sie analog für $|-_x\rangle$ vor.

(v) Was impliziert der experimentelle Befund, dass die Messung des Spins in x-Richtung bei einem Teilchen im Zustand $|+_x\rangle$ niemals $-1/2$ ergibt, für das Skalarprodukt $\langle +_x \,|\, -_x\rangle$? Verwenden Sie dies, um einen der freien Parameter von $|\pm_x\rangle$ zu eliminieren.

(vi) Wiederholen Sie die Teilaufgaben (iii)-(v) für die y-Richtung.

(vii) Da der Stern-Gerlach Versuch in jede andere beliebige Richtung aufgebaut werden kann, ohne die physikalischen Beobachtungen zu verändern, gilt die Argumentation aus Teilaufgabe (iv) auch für die Skalarprodukte $\langle \pm_y \,|\, \pm_x \rangle$. Leiten Sie daraus eine Beziehung für die beiden übrigen freien Parameter her.

(viii) Diese Beziehung impliziert, dass S_x und S_y nicht beide reell sein können. Wählen Sie schließlich die freien Parameter so, dass die Matrix S_x reell ist, und geben Sie S_x und S_y explizit in Matrixnotation an.

Solution

(i)
a) $P_\pm = |\pm\rangle\langle\pm|$,
b) Follows immediately,
c) $S_z = \frac{1}{2}|+\rangle\langle+| - \frac{1}{2}|-\rangle\langle-|$,
d) cf. (iv),
e) cf. (v).

(ii) We have $S_+ = |+\rangle\langle-|$ and $S_- = |-\rangle\langle+|$.

(iii) $S_x = \frac{1}{2}|+_x\rangle\langle+_x| - \frac{1}{2}|-_x\rangle\langle-_x|$

(iv) We construct the superpositions

$$
\begin{aligned}
|+_x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\alpha_1}|+\rangle + e^{i\alpha_2}|-\rangle\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + e^{i\alpha}|-\rangle\right),\\
|-_x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\beta_1}|+\rangle - e^{i\beta_2}|-\rangle\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - e^{i\beta}|-\rangle\right).
\end{aligned}
$$

(v) We compute

$$
\begin{aligned}
0 = \langle+|-\rangle &= \frac{1}{2}\left(\langle+| + e^{-i\alpha}\langle-|\right)\left(|+\rangle - e^{i\beta}|-\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}(1 - e^{-i\alpha+i\beta}),
\end{aligned}
$$

which is satisfied if $\alpha = \beta$. The superpositions then read (since we can factorise an overall phase)

$$
\begin{aligned}
|+_x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + e^{i\delta_1}|-\rangle\right),\\
|-_x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - e^{i\delta_1}|-\rangle\right),
\end{aligned}
$$

where δ_1 is a to-be-determined, free parameter.

(vi) Clearly, $S_y = \frac{1}{2}|+_y\rangle\langle+_y| - \frac{1}{2}|-_y\rangle\langle-_y|$.
Now we do the same as before for $|\pm_y\rangle$, we start with the ansatz

$$
\begin{aligned}
|+_y\rangle &\sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + e^{i\alpha}|-\rangle\right),\\
|-_y\rangle &\sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - e^{i\beta}|-\rangle\right).
\end{aligned}
$$

and computing the inner product gives the same relation for α and β, so we obtain

$$
\begin{aligned}
|+_y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + e^{i\delta_2}|-\rangle\right),\\
|-_y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - e^{i\delta_2}|-\rangle\right).
\end{aligned}
$$

(vii) We know that $|\langle \pm_y \,|\, +_x \rangle| = |\langle \pm_y \,|\, -_x \rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Computing the first expression explicitly gives

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{2}\left|(\langle + \,| \pm e^{-i\delta_2}\,\langle - \,|)(|\, +\rangle + e^{i\delta_1}\,|\, -\rangle)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|1 \pm e^{i(\delta_1-\delta_2)}\right| .\end{aligned}$$

We conclude that $\delta_2 - \delta_1 = \pm\frac{\pi}{2}$, so there must be one complex superposition.

(viii) We can choose the entries of S_x to be purely real by taking $\delta_1 = 0$, then S_y will have purely imaginary entries, since $\delta_2 = \frac{\pi}{2}$. The other choice, $\delta_2 = -\frac{\pi}{2}$, corresponds to a left-handed coordinate system (swapping the direction of the y-axis for given x and z.) We obtain the superpositions

$$\begin{aligned}|\, +_x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\, +\rangle + |\, -\rangle\right), \\ |\, -_x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\, +\rangle - |\, -\rangle\right), \\ |\, +_y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\, +\rangle + i\,|\, -\rangle\right), \\ |\, -_y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\, +\rangle - i\,|\, -\rangle\right),\end{aligned}$$

and the corresponding matrices in z-basis are the other two Pauli-matrices (times $\frac{1}{2}$), given by

$$S_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \text{ and } S_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}.$$