Prof. Dr. Stefan Hofmann Wintersemester 2018/19

Übungen zur Quantenmechanik (T2)

Übungsblatt 4, Besprechung vom 08.11. – 15.11.

Aufgabe 1 – Kurzfragen

(i) Seien $\{\left| \alpha^{(i)} \right\rangle\}$ und $\{\left| \beta^{(i)} \right\rangle\}$ zwei verschiedene Orthonormalbasen eines endlich-dimensionalen Hilbertraums $\mathscr{H}$ mit $i \in \{1, 2, \ldots \dim(\mathscr{H})\}$. Die Matrix U beschreibe den zugehörigen Basiswechsel

$$\left| \alpha^{(i)} \right\rangle = U \left| \beta^{(i)} \right\rangle .$$

Zeigen Sie, dass U unitär ist.

(ii) Auf dem letzten Übungsblatt haben Sie die sogenannten Pauli-Matrizen σ_i hergeleitet, definiert als

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$ für $i = 1, 2, 3$. Zeigen Sie weiterhin, dass diese Matrizen die Kommutator- und Antikommutatorrelationen

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$
$$[\sigma_i, \sigma_j]_+ = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}\mathbb{1}$$

erfüllen. Die Spin-Operatoren auf dem letzten Blatt waren gegeben durch $S_i = \frac{1}{2}\sigma_i$. Wie lautet die Kommutatoralgebra der Spin-Operatoren? Erklären Sie anhand der Algebra, wieso der Spin als Eigendrehimpuls bezeichnet wird. Zeigen Sie abschließend, dass für $\boldsymbol{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ die Kommutatorrelation

$$[\boldsymbol{S}^2, S_i] = 0,$$

gilt.

Aufgabe 2 – Spin in beliebiger Raumrichtung

Auf dem letzten Blatt haben wir die quantenmechanische Beschreibung der Spin-Projektion in x-, y- und z-Richtung diskutiert. Nun wollen wir die dort gewonnenen Erkenntnisse auf Spin-Projektionen in eine beliebige Richtung verallgemeinern.
Diese beliebige Richtung werde durch den Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{n}}$ beschrieben, und der Operator, welcher den Spin in diese Richtung ausliest, durch

$$S_{\hat{\boldsymbol{n}}} := \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3} n_i \cdot S_i.$$

Hier bezeichne $\{S_i\}_{i \in \mathscr{I}(3)}$ wie bisher auch die Spinmatrizen. $|\pm_{\hat{\boldsymbol{n}}}\rangle$ bezeichne einen Zustand mit Spin-Projektion $\pm 1/2$ in $S_{\hat{\boldsymbol{n}}}$-Richtung.

(i) Stellen Sie $S_{\hat{\boldsymbol{n}}}$ als Matrix in der Basis der Eigenzustände von S_z dar.
Tipp: Sie können hier Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 3 (viii) des letzten Blattes verwenden.

(ii) Bestimmen Sie $|\pm_{\hat{\boldsymbol{n}}}\rangle$ in dieser Basis.

(iii) Finden Sie die Darstellung von $S_{\hat{\boldsymbol{n}}}$ und $|\pm_{\hat{\boldsymbol{n}}}\rangle$ in Bra-Ket-Notation unter Verwendung der Eigenzustände des Spins in x-, y- und z-Richtung.

(iv) Benutzen Sie Teilaufgabe (iii) um die folgenden Skalarprodukte zu berechnen:

$$\langle + | \pm_{\hat{\boldsymbol{n}}}\rangle\,, \quad \langle - | \pm_{\hat{\boldsymbol{n}}}\rangle\,, \quad \langle +_x | \pm_{\hat{\boldsymbol{n}}}\rangle\,, \quad \langle -_x | \pm_{\hat{\boldsymbol{n}}}\rangle\,.$$

(v) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe (iv) indem Sie die Spezialfälle $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{x}}$ und $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{z}}$ betrachten.

(vi) Nun sei $\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{z}})$. Welche Verteilung der Intensitäten erwarten Sie für die Spinprojektion $\pm 1/2$ in x- bzw. z-Richtung? Beziehen Sie in Ihre Argumentation auch die Ergebnisse aus Teilaufgabe (iv) mit ein.

Aufgabe 3 – Lineare Algebra, Teil III: Spektralsatz für Matrizen

Auf den letzten Blättern haben wir Grundbegriffe aus der linearen Algebra wiederholt, sowie lineare Operatoren, d.h. Vektorraum-Endomorphismen $\mathscr{O}\colon V \to V$ eingeführt. Von großer Wichtigkeit sind für uns die selbst-adjungierten Operatoren, welche durch hermitesche Matrizen T dargestellt werden können. Diese haben einige nützliche Eigenschaften, insbesondere können sie diagonalisiert werden. Wir möchten nun die Idee der Diagonalisierung auf die zugrunde liegende lineare Abbildung $\mathscr{T}$ erweitern. Wir können die Diagonalisierbarkeit mittels dem Spektralsatz für hermitesche Matrizen begründen.

Satz (Spektralsatz für hermitesche Matrizen)**.** *Sei T eine hermitesche Matrix auf einem n-dimensionalen komplexen Hilbertraum V. Dann gilt*

a) alle Eigenwerte von T sind reell,

b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zueinander,

c) es existiert eine Orthonormalbasis von V bestehend aus Eigenvektoren von T.

(i) Zeigen Sie a) und b) des Spektralsatzes. Betrachten Sie hierfür $\langle w, Tv\rangle$ für Eigenvektoren v, w.

(ii) Um c) zu zeigen, ist es hilfreich, wie folgt vorzugehen:

- Zeigen Sie, dass für einen Vektor v_1 aus dem Eigenraum $\mathrm{Eig}(\lambda_1)$ zum Eigenwert λ_1 gilt

$$Tv_1 \in \mathrm{Eig}(\lambda_1),$$

  sowie für einen Vektor v_2 aus dem orthogonalen Komplement $V_2 = \mathrm{Eig}(\lambda_1)^\perp$

$$Tv_2 \in V_2.$$

  Beides sind also invariante Unterräume.
- Zeigen Sie, dass die auf den Unterraum V_2 reduzierte Matrix immernoch hermitesch ist.
- Gehen Sie nun induktiv vor, um zu zeigen, dass V von einer orthonormalen Basis aus Eigenvektoren von T aufgespannt wird.

Wir stellen erfreut fest, dass wir in diesem Beweis nicht notwendigerweise von der genauen Darstellung der linearen Abbildung $\mathscr{T}$ Gebrauch machen mussten. Mit einer kurzen Definition können wir den Spektralsatz sofort für selbst-adjungierte Operatoren beweisen. Wir definieren das *Spektrum* $\sigma(\mathscr{T})$ von $\mathscr{T}$ als die Menge der Eigenwerte. Dann gilt

Satz (Spektralsatz für selbst-adjungierte Operatoren)**.** *Es sei $\mathscr{T}$ ein selbst-adjungierter Operator auf einem endlich-dimensionalen komplexen Hilbertraum V. Dann gilt*

a) das Spektrum von $\mathscr{T}$ ist reell, *b) es existiert eine Orthonormalbasis* $\{v_1, v_2, \ldots, v_{\dim(V)}\}$ *von* V*, die aus Eigenvektoren von* $\mathscr{T}$ *besteht,*

c) es existiert eine Spektraldarstellung des Operators $\mathscr{T}$*, d.h. es existieren orthogonale Projektoren* $\mathscr{P}(\lambda)$ *auf die Eigenräume* $\mathrm{Eig}(\lambda)$*, so dass*

$$\mathscr{T} = \sum_{\lambda \in \sigma(\mathscr{T})} \lambda \mathscr{P}(\lambda).$$

Um dies zu zeigen, werden wir die Projektoren $\mathscr{P}(\lambda)$ explizit konstruieren. Der Rest folgt dann aus dem Spektralsatz für hermitesche Matrizen.

(iii) Zeigen Sie a) und b) des Spektralsatzes für lineare Operatoren.

(iv) Nutzen Sie die Orthonormalbasis, um Projektoren auf die Eigenräume zu konstruieren und c) des Spektralsatzes zu zeigen. Beachten Sie, dass Eigenwerte auch entartet sein können.

(v) Nutzen Sie die Spektraldarstellung, um Funktionen von Operatoren $f(\mathscr{T})$ analog zu Funktionen von Matrizen zu definieren.