

Übungen zur Quantenmechanik (T2)

Übungsblatt 5, Besprechung vom 15.11. – 19.11.

Aufgabe 1 – Kurzfragen

Betrachten Sie im Folgenden zwei endlich-dimensionale komplexe Hilberträume V und W , mit Dimension n bzw. m , sowie einer Orthonormalbasis $|a_i\rangle$ bzw. $|b_j\rangle$. Betrachten Sie nun das Tensorprodukt $V \otimes W$ sowie die direkte Summe $V \oplus W$.

- (i) Geben Sie die Definition für $V \otimes W$ und $V \oplus W$ als komplexe Vektorräume an.
- (ii) Konstruieren Sie aus den Orthonormalbasen eine Basis für das Tensorprodukt sowie für die direkte Summe.
- (iii) Leiten Sie daraus die Dimension für das Tensorprodukt sowie für die direkte Summe her.
- (iv) Entscheiden Sie, ob die Abbildungen

$$A: V \times W \rightarrow V \oplus W \\ (v, w) \mapsto (v, w) \in V \oplus W$$

$$B: V \times W \rightarrow V \otimes W \\ (v, w) \mapsto (v, w) \in V \otimes W$$

bilinear sind.

- (v) Können Sie die inneren Produkte von V und W auf das Tensorprodukt sowie die direkte Summe erweitern? Falls ja, geben Sie eine Definition an.
- (vi) Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Stellen Sie das Tensorprodukt $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ explizit in Matrixform dar. Wie sieht die entsprechende Darstellung von (\mathbf{v}, \mathbf{w}) als direkte Summe aus?

Aufgabe 2 – Spin und Stern-Gerlach Ketten in beliebiger Raumrichtung

Betrachten Sie drei Stern-Gerlach Apparaturen, die folgendermaßen eingerichtet sind:

Die erste Apparatur lässt nur Atome passieren, deren Spin in positiver z -Achse ausgerichtet ist.

Die zweite Apparatur ist entlang des Vektors $\hat{\mathbf{n}}$ ausgerichtet, welcher in der xz -Ebene liegt und einen Winkel β mit der z -Achse einschließt und nur positive $\hat{\mathbf{n}}$ -polarisierte Spins durchlässt.

Die dritte Apparatur ist wiederum entlang der z -Achse ausgerichtet, lässt aber nur Spins mit negativer Spinausrichtung passieren.

- (i) Berechnen Sie den Zustand nach der Stern-Gerlach Kette und diskutieren Sie die Fälle $\beta = 0, \frac{\pi}{2}$ und π .
- (ii) Drehen Sie die gesamte Stern-Gerlach Kette in der xz -Ebene um einen beliebigen Winkel α . Wie verändert sich Ihr Zustand?

- (iii) Wie würde eine Person, welche nun das verdrehte Experiment vorfindet, die Stern-Gerlach Kette beschreiben (der erste Apparat ist für diese Person wieder S_z). Welchen Zustand berechnet diese Person und wie ist Ihr Ergebnis mit dem der ersten Person vereinbar?

Aufgabe 3 – Stern-Gerlach in Farbe

Im Folgenden betrachten wir eine Stern-Gerlach Apparatur in z -Richtung, d.h. wir entwickeln in normierte Eigenzustände $|+\rangle$ und $|-\rangle$ des Spin-Hilbertraumes $\mathcal{H}_s = \mathbb{C}^2$. Weiterhin haben wir einen Apparat, welcher die Farbe hellrot oder dunkelrot, bezeichnet durch $|r\rangle$ und $|\bar{r}\rangle$ im Farb-Hilbertraum $\mathcal{H}_f = \mathbb{C}^2$ misst. Dieser funktioniert analog zum Stern-Gerlach Apparat.

Nehmen Sie nun an, Sie untersuchen Teilchen, die sowohl eine Spin-Ausrichtung als auch eine Farbe haben, und dass Sie beide gleichzeitig unabhängig voneinander messen können.

- (i) Wie lautet der vollständige Zustandsraum \mathcal{H} zur gleichzeitigen Beschreibung der Spin-Ausrichtung und der Farb-Ausrichtung? Bestimmen Sie auch aus den Basen $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ und $\{|r\rangle, |\bar{r}\rangle\}$ eine Basis für den Zustandsraum \mathcal{H} .
- (ii) Betrachten Sie die Operatoren, welche auf den Spinraum bzw. den Farbraum wirken

$$S_{z,s} = \frac{1}{2}|+\rangle\langle+| - \frac{1}{2}|-\rangle\langle-|, \quad A_{r,f} = |r\rangle\langle r| - |\bar{r}\rangle\langle\bar{r}|.$$

Finden Sie die korrespondierenden Operatoren auf dem vollständigen Zustandsraum.

- (iii) Wie lautet die Darstellung des Zustands $|\psi\rangle$, welcher eine positive Spin-Ausrichtung in z -Richtung sowie die Farbe rot hat?