# Übungen zur Quantenmechanik (T2)

## Übungsblatt 5, Besprechung vom 15.11. – 19.11.

## Aufgabe 1 – Kurzfragen

Betrachten Sie im Folgenden zwei endlich-dimensionale komplexe Hilberträume $V$ und $W$, mit Dimension $n$ bzw. $m$, sowie einer Orthonormalbasis $|\, a_i\rangle$ bzw. $|\, b_j\rangle$. Betrachten Sie nun das Tensorprodut $V \otimes W$ sowie die direkte Summe $V \oplus W$.

(i) Geben Sie die Definition für $V \otimes W$ und $V \oplus W$ als komplexe Vektorräume an.

(ii) Konstruieren Sie aus den Orthonormalbasen eine Basis für das Tensorprodukt sowie für die direkte Summe.

(iii) Leiten Sie daraus die Dimension für das Tensorprodukt sowie für die direkte Summe her.

(iv) Entscheiden Sie, ob die Abbildungen

$$A\colon V \times W \to V \oplus W \qquad\qquad B\colon V \times W \to V \otimes W$$
$$(v,w) \mapsto (v,w) \in V \oplus W \qquad\qquad (v,w) \mapsto (v,w) \in V \otimes W$$

bilinear sind.

(v) Können Sie die inneren Produkte von $V$ und $W$ auf das Tensorprodukt sowie die direkte Summe erweitern? Falls ja, geben Sie eine Definition an.

(vi) Gegeben seien die Vektoren $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Stellen Sie das Tensorprodukt $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$ explizit in Matrixform dar. Wie sieht die entsprechende Darstellung von $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ als direkte Summe aus?

## Solution

(i) The direct sum as a set is simply the Cartesian product $V \times W$. We give this set a vector space structure by defining component-wise addition and multiplication, i.e. for $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ and $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(v_1, w_1) +_{V\oplus W} (v_2, w_2) := (v_1 +_V v_2, w_1 +_W w_2)$$
$$\lambda \cdot_{V\oplus W} (v, w) := (\lambda \cdot_V v, \lambda \cdot_W w).$$

To define the tensor product, it is easiest to construct a basis and write down the elements explicitly. Given a basis $a_i$ and $b_j$ of the two vector spaces, we define the tensor product space basis as

$$e_{ij} = a_i \otimes b_j = (a_i, b_j) \in \{a_i \colon i \in I(n)\} \times \{b_j \colon j \in I(m)\}.$$

Let us thus denote the elements of the tensor product by

$$v \otimes w = \sum_{i,j=1}^{n,m} v^i a_i \otimes w^j b_j = \sum_{ij} v^i w^j a_i \otimes b_j =: \sum_{ij} c^{ij} e_{ij},$$

and define the vector space structure

$$v_1 \otimes w_1 +_{V\otimes W} v_2 \otimes w_2 := (v_1 + v_2) \otimes (w_1 + w_2)$$
$$\lambda \cdot_{V\otimes W} v \otimes w := (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w).$$

The important aspect of the tensor product opposed to the direct sum is its multilinearity (cf. (iv)).

(ii) We have for the direct sum a $n+m$-dimensional basis given by $e_1 = (a_1, 0), \ldots, e_n = (a_n, 0)$ and $e_{n+1} = (0, b_1), \ldots, e_{n+m} = (0, b_n)$. If we choose a representation such that $a_i$ is the unit vector in the $i$-th direction, i.e. $a_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, these vectors $e_i$ are simply vectors which go from $(1, 0, \ldots, 0)$ to $(0, \ldots, 0, 1)$ for $n+m$-tuples.
For the tensor product, we can define the basis $e_{ij} = a_i \otimes b_j$ as before, and an element $v \otimes w$ is expanded as (using Einstein summation convention)

$$v \otimes w = (v^i a_i) \otimes (w^j b_j) = v^i w^j a_i \otimes b_j = c^{ij} e_{ij}$$

(iii) From the basis, we see that the direct sum is $m+n$-dimensional, whereas the tensor product is $m \cdot n$-dimensional.

(iv) From the definitions above, we have

$$A(\alpha v, \alpha w) = \alpha A(v, w),$$

so this is *not* bilinear, and

$$B(\alpha v, \beta w) = \alpha\beta B(v, w),$$

so $B$ is bilinear.

(v) Yes, we can define on the direct sum the inner product

$$\langle (v_1, w_1), (v_2, w_2) \rangle := \langle v_1, v_2 \rangle + \langle w_1, w_2 \rangle$$

and for the tensorproduct

$$\langle (v_1, w_1), (v_2, w_2) \rangle := \langle v_1, v_2 \rangle \cdot \langle w_1, w_2 \rangle.$$

It is straightfoward to check that these are indeed inner products.

(vi) We define the basis $e_{ij} = e_i \otimes e_j$ for the standard basis vectors $e_i, e_i$ of $\mathbb{R}^2$

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Then

$$v \otimes w = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

For the direct sum, we take the basis defined above and get

$$(v, w) = (2, 4, -1, 3).$$

## Aufgabe 2 – Spin und Stern-Gerlach Ketten in beliebiger Raumrichtung

Betrachten Sie drei Stern-Gerlach Apparaturen, die folgendermaßen eingerichtet sind:
Die erste Apparatur lässt nur Atome passieren, deren Spin in positiver $z$-Achse ausgerichtet ist.
Die zweite Apparatur ist entlang des Vektors $\hat{\boldsymbol{n}}$ ausgerichtet, welcher in der $xz$-Ebene liegt und einen Winkel $\beta$ mit der $z$-Achse einschließt und nur positive $\hat{\boldsymbol{n}}$-polarisierte Spins durchlässt.
Die dritte Apparatur ist wiederum entlang der $z$-Achse ausgerichtet, lässt aber nur Spins mit negativer Spinausrichtung passieren.

(i) Berechnen Sie den Zustand nach der Stern-Gerlach Kette und diskutieren Sie die Fälle $\beta = 0, \frac{\pi}{2}$ und $\pi$.

(ii) Drehen Sie die gesamte Stern-Gerlach Kette in der $xz$-Ebene um einen beliebigen Winkel $\alpha$. Wie verändert sich Ihr Zustand?

(iii) Wie würde eine Person, welche nun das verdrehte Experiment vorfindet, die Stern-Gerlach Kette beschreiben (der erste Apparat ist für diese Person wieder $S_z$). Welchen Zustand berechnet diese Person und wie ist Ihr Ergebnis mit dem der ersten Person vereinbar?

## Solution

(i) The SG chain is $SG_z^- \circ SG_{\hat{\boldsymbol{n}}}^+ \circ SG_z^+$. In terms of states, for incoming $|\,\psi_i\rangle$, we have

$$|\,\psi_f\rangle = |\,-_z\rangle\,\langle -_z\,|\,+_n\rangle\,\langle +_n\,|\,+_z\rangle\,\langle +_z\,|\,\psi_i\rangle\,.$$

From the last problem set, we know ($\theta = \beta$ and $\phi = 0$ since we work in the $xz$-plane)

$$|\,+_n\rangle = \cos\frac{\beta}{2}\,|\,+_z\rangle + \sin\frac{\beta}{2}\,|\,-_z\rangle\,.$$

We thus compute

$$|\,\psi_f\rangle = |\,-_z\rangle \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\,\langle +_z\,|\,\psi_i\rangle\,.$$

For the case $\beta = 0$, we obtain $|\,\psi_f\rangle = 0$, since we have $S_z^+$ and $S_z^-$ in sequence.
For $\beta = \frac{\pi}{2}$, we see

$$|\,\psi_f\rangle = |\,-_z\rangle \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\,\langle +_z\,|\,\psi_i\rangle = \frac{1}{2}\,\langle +_z\,|\,\psi_i\rangle\,|\,-_z\rangle\,,$$

as we would expect, since $S_n^+$ now projects out the $-_x$-polarised component.
For the case $\beta = \pi$, we again obtain

$$|\,\psi_f\rangle = 0$$

with the same argument as $\beta = 0$.

(ii) Now we rotate the *entire* apparatus by angle $\alpha$. If we choose the same direction of rotation as for $n$ relative to the $z$-axis, we now obtain

$$S_z \to S_{n_\alpha}, \quad S_{n_\beta} \to S_{n_{\alpha+\beta}}\,.$$

The new eigenstates are the corresponding states derived on the last sheet.

(iii) Consider the observers Alice and Bob, where Alice has the old coordinate system and the rotated apparatus, and Bob has the new coordinate system, rotated by angle $\alpha$, and the rotated apparatus which is **not** rotated in his coordinate system. Then Alice sees the system as we derived in part (ii), but Bob sees the original system, since his $n_z$ corresponds to Alice's $n_\alpha$. To translate between both observers, we only need the mapping

$$S_{z,\mathrm{Bob}} = S_{n_\alpha,\mathrm{Alice}}$$

which gives us a correspondence between states $|\,\pm_{z,\mathrm{Bob}}\rangle$ and $|\,\pm_{n_\alpha,\mathrm{Alice}}\rangle$. Now we only have to be careful about the incoming state $|\,\psi_i\rangle$, since if this state is polarised, this polarisation also needs to be rotated accordingly. Alice has the original $|\,\psi_i\rangle$, but Bob would measure a polarisation rotated by $-\alpha$.

Now let us develop the dictionary between Alice and Bob. We denote the rotation by angle $\alpha$ by $U_\alpha$. Under a so-called passive transformation, states would **not** transform, but the operators representing the system would transform as

$$A \to U_\alpha^\dagger A U_\alpha$$

and amplitudes would transform as

$$\langle \phi\,|\,A\,|\,\psi\rangle \to \langle \phi\,|\,U_\alpha^\dagger A U_\alpha\,|\,\psi\rangle\,.$$

To find $U_\alpha$, we use the results of last problem set. Alice considers the operator $S_{n_\alpha}$ instead of $S_z$, which was given by (cf. last sheet)

$$S_{\hat{\boldsymbol{n}}} = \frac{1}{2}\left(\cos\alpha\,|\,+\rangle\langle+\,|+\sin\alpha\,|\,+\rangle\langle-\,|+\sin\alpha\,|\,-\rangle\langle+\,|-\cos\alpha\,|\,-\rangle\langle-\,|\right),$$

i.e. we can read off the matrix $U_\alpha$ (using the same trigonometric identities as last sheet) to be

$$U_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2} \\ -\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$

(Note that this is also the first manifestation of the double covering nature of $SU(2)$ with respect to $SO(3)$.)

Bob, however, sees the operators unchanged, $S_z \to S_z$, but rotates the vectors, e.g. the state with polarisation $|\,+_z\rangle$ into the state with polarisation $|\,+_{-\alpha}\rangle$, which corresponds to an (active) transformation

$$|\,\psi\rangle \to U_\alpha\,|\,\psi\rangle$$

giving us the transformation of amplitudes

$$\langle\phi\,|\,A\,|\,\psi\rangle \to \langle\phi\,|\,U_\alpha^\dagger A U_\alpha\,|\,\psi\rangle\,.$$

So both observers would agree that the original amplitude $\langle\phi\,|\,A\,|\,\psi\rangle$ transforms as

$$\langle\phi\,|\,A\,|\,\psi\rangle \to \left\langle\phi\,\middle|\,U^\dagger A U\,\middle|\,\psi\right\rangle = \langle U\phi\,|\,A\,|\,U\psi\rangle\,.$$

Note that we followed the literature here with calling transformations active and passive, even though they might seem counter-intuitive at first. But the active transformation rotates the vectors $|\,\psi\rangle$, whereas the passive transformation rotates the basis $|\,e_i\rangle$, which are eigenstates of the observables, so we can equivalently rotate the observables.

## Aufgabe 3 – Stern-Gerlach in Farbe

Im Folgenden betrachten wir eine Stern-Gerlach Apparatur in $z$-Richtung, d.h. wir entwickeln in normierte Eigenzustände $|\,+\rangle$ und $|\,-\rangle$ des Spin-Hilbertraumes $\mathscr{H}_s = \mathbb{C}^2$. Weiterhin haben wir einen Apparat, welcher die Farbe hellrot oder dunkelrot, bezeichnet durch $|\,r\rangle$ und $|\,\bar{r}\rangle$ im Farb-Hilbertraum $\mathscr{H}_f = \mathbb{C}^2$ misst. Dieser funktioniere analog zum Stern-Gerlach Apparat.

Nehmen Sie nun an, Sie untersuchen Teilchen, die sowohl eine Spin-Ausrichtung als auch eine Farbe haben, und dass Sie beide gleichzeitig unabhängig voneinander messen können.

(i) Wie lautet der vollständige Zustandsraum $\mathscr{H}$ zur gleichzeitigen Beschreibung der Spin-Ausrichtung und der Farb-Ausrichtung? Bestimmen Sie auch aus den Basen $\{|\,+\rangle\,,|\,-\rangle\}$ und $\{|\,r\rangle\,,|\,\bar{r}\rangle\}$ eine Basis für den Zustandsraum $\mathscr{H}$.

(ii) Betrachten Sie die Operatoren, welche auf den Spinraum bzw. den Farbraum wirken

$$S_{z,s} = \frac{1}{2}\,|\,+\rangle\langle+\,| - \frac{1}{2}\,|\,-\rangle\langle-\,|\,,\quad A_{r,f} = |\,r\rangle\langle r\,| - |\,\bar{r}\rangle\langle\bar{r}\,|\,.$$

Finden Sie die korrespondierenden Operatoren auf dem vollständigen Zustandsraum.

(iii) Wie lautet die Darstellung des Zustands $|\,\psi\rangle$, welcher eine positive Spin-Ausrichtung in $z$-Richtung sowie die Farbe rot hat?

## Solution

(i) The state space is the tensor product $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$. As a basis we choose $|+,a\rangle$, $|+,b\rangle$, $|-,a\rangle$, and $|-,b\rangle$.

(ii) We can define the operators

$$S_z \coloneqq S_{z,s} \otimes \mathrm{Id}_2, \quad A_r \coloneqq \mathrm{Id}_1 \otimes A_{r,f},$$

acting on a state $|\psi\rangle = |+,r\rangle$ as

$$S_z |+,r\rangle = +\frac{1}{2} |+,r\rangle, \quad A_r |+,r\rangle = |+,r\rangle.$$

(iii) It is $|\psi\rangle = |+,r\rangle$.