Prof. Dr. Stefan Hofmann Wintersemester 2018/19

Übungen zur Quantenmechanik (T2)

Übungsblatt 6, Besprechung vom 22.11 – 26.11

Aufgabe 1 – Kurzfragen

(i) Zeigen Sie für $|\,\psi\rangle = |\,a\rangle \otimes |\,b\rangle$, dass

$$\langle\psi\,|\,\psi\rangle = \langle a\,|\,a\rangle\,\langle b\,|\,b\rangle\,.$$

Betrachten Sie nun das kombinierte Stern-Gerlach und Farbmessungsexperiment vom letzten Blatt. Analog zum normalen Stern-Gerlach Experiment, definieren wir nun die Spin-Projektion in x-Richtung, sowie die Farben hellblau und dunkelblau. Die zugehörigen Operatoren im Spin- und Farbraum seien definiert als

$$S_{x,s} = \frac{1}{2}\,|\,+\rangle\langle-\,| + \frac{1}{2}\,|\,-\rangle\langle+\,|\,, \quad A_{b,f} = i\,|\,r\rangle\langle\bar{r}\,| - i\,|\,\bar{r}\rangle\langle r\,|\,.$$

(ii) Geben Sie die zugehörigen Operatoren im vollständigen Zustandsraum an.

(iii) Bestimmen Sie die normierten Eigenzustände dieser Operatoren in der kombinierten S_z und A_r Basis $|\,s_z, f_r\rangle$ vom letzten Blatt, sowie die Amplituden

$$\langle +, r\,|\,+_x, r\rangle\,, \quad \langle +, r\,|\,+_x, r\rangle\,, \quad \langle +, r\,|\,+, b\rangle\,, \quad \langle +, r\,|\,+_x, b\rangle\,.$$

(iv) Betrachten Sie nun die folgende Kette von Selektionsprozessen

$$S_z^+ \circ A_b^b \circ S_z^- \circ A_r^r \circ A_b^b.$$

Welche Selektionen können vertauscht werden, welche nicht?

(v) Bestimmen Sie für den eingehenden Zustand $|\,-, r\rangle$ den ausgehenden Zustand dieser Kette.

Aufgabe 2 – Relationale Zustände und Messvorgang

In der Vorlesung haben Sie die quantenmechanische Beschreibung des Messvorgangs auf einem abstraktem Level kennengelernt. Ziel dieser Aufgabe ist es nun, diese Beschreibung anhand eines Ihnen mittlerweile gut bekannten Beispiels zu verdeutlichen.
Hierfür betrachten wir zunächst eine einzelne Stern-Gerlach-Apparatur $SG_3^\pm$, verbunden mit einem Detektor. Die Quelle der Apparatur emittiere nun ein einzelnes, in $\boldsymbol{e_3}$-Richtung „unpolarisiertes“ Silberatom. Falls die Messung an diesem Atom zu dem Ergebnis $|\,s_z\rangle = |\,+\rangle$ führt befinde sich der Detektor im Zustand $|\,d_+\rangle$, während er im Fall $|\,s_z\rangle = |\,-\rangle$ durch den Zustand $|\,d_-\rangle$ beschrieben werden kann. Der durch $|\,d_+\rangle$ und $|\,d_-\rangle$ aufgespannte Zustandsraum werde von nun an als $\mathscr{H}_D$ bezeichnet.

(i) Drücken Sie den Zustand des Gesamtsystems $|\,Z_1\rangle$ (Silberatom und Detektor) durch die Spin- bzw. Detektorzustände aus.

(ii) Geben Sie die zu $|\,d_+\rangle$ und $|\,d_-\rangle$ relationalen Zustände im Spin-Zustandsraum $\mathscr{H}_S$ an.

(iii) Die Spin- und Detektor-Zustände lassen sich wie folgt darstellen:

$$|\, d_+ \rangle \doteq (1,0)^T, \quad |\, d_- \rangle \doteq (0,1)^T, \quad |\, s_+ \rangle \doteq (1,0)^T, \quad |\, s_- \rangle \doteq (0,1)^T$$

Bestimmen Sie $|\, Z_1 \rangle$ in dieser Darstellung.

Als nächstes wollen wir den Fall betrachten, dass nacheinander zwei Silberatome emittiert werden. Der an die Stern-Gerlach-Apparatur angeschlossene Detektor werde hierfür durch einen Zähler ersetzt. Die möglichen Zustände des Zählers, $\{|\, 0 \rangle, |\, 1 \rangle, |\, 2 \rangle\} \subset \mathscr{H}_Z$, entsprechen der Anzahl der Atome mit „Spin $= +1/2$ “.

(iv) Drücken Sie den Zustand des Systems $|\, Z_2 \rangle$ (zwei Silberatome und Zähler) durch die Spin- bzw. Zählerzustände aus.

(v) Geben Sie explizit den Zustandsraum von $|\, Z_2 \rangle$ an. Welche Bedeutung hat die Reihenfolge in der Sie die Zustandsräume der Silberatome, $\mathscr{H}_S^1$ und $\mathscr{H}_S^2$, implementieren?

(vi) Geben Sie die zu $|\, 0 \rangle$, $|\, 1 \rangle$ und $|\, 2 \rangle$ relationalen Zustände im Spin-Zustandsraum $\mathscr{H}_S^1 \otimes \mathscr{H}_S^2$ an.

(vii) Auch die Zähler-Eigenzustände können als Spaltenvektoren dargestellt werden:

$$|\, 0 \rangle \doteq (1,0,0)^T, \quad |\, 1 \rangle \doteq (0,1,0)^T, \quad |\, 2 \rangle \doteq (0,0,1)^T$$

Drücken Sie $|\, Z_2 \rangle$ in dieser Darstellung aus. Verwenden Sie hierbei die Basis aus (iii) um die Spin-Zustände zu beschrieben.

Aufgabe 3 – Rotation von Stern-Gerlach-Zuständen

(i) Für die Rotation eines Stern-Gerlach Systems fanden wir die Darstellung einer Rotation um Winkel α um die y-Achse (in rechtshändiger Richtung) durch die unitäre Abbildung

$$U_{\hat{y}}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2}) & -\sin(\frac{\alpha}{2}) \\ \sin(\frac{\alpha}{2}) & \cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass sich diese Matrix schreiben lässt als

$$U_{\hat{y}}(\alpha) = \exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\sigma_y\right).$$

(ii) Überzeugen Sie sich, dass die Rotationen um die x- bzw. z-Achse durch die Matrizen

$$U_{\hat{x}}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2}) & -i\sin(\frac{\alpha}{2}) \\ -i\sin(\frac{\alpha}{2}) & \cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \quad U_{\hat{z}}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2}) - i\sin(\frac{\alpha}{2}) & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\alpha}{2}) + i\sin(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}$$

gegeben sind, und zeigen Sie, dass sie diese schreiben können als

$$U_{\hat{x}}(\alpha) = \exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\sigma_x\right), \quad U_{\hat{z}}(\alpha) = \exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\sigma_z\right).$$

(iii) Für eine Rotation um eine beliebige Achse finden wir daher

$$U_{\hat{n}}(\alpha) = \exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) = \exp\left(-i\alpha\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{S}\right).$$

Finden Sie die explizite Matrixdarstellung dieser Rotation.

(iv) Betrachten Sie nun einen Zustand $|\, \psi \rangle$. Was passiert unter einer Rotation um $\alpha = 2\pi$, was unter einer Rotation um $\alpha = 4\pi$.

(v) Vergleichen Sie dieses Verhalten mit Rotationen im dreidimensionalen Raum. Was geschieht hier bei einer Rotation um Winkel 2π, was bei einer Rotation um 4π? Vergleichen Sie auch die Algebra von $SO(3)$ mit der Algebra der S_i-Operatoren.

(vi) Überlegen Sie sich, ob wir tatsächlich eine lineare Darstellung der Rotationsgruppe $SO(3)$ gefunden haben.