Prof. Dr. Stefan Hofmann Wintersemester 2018/19

Übungen zur Quantenmechanik (T2)

Übungsblatt 6, Besprechung vom 22.11 – 26.11

Aufgabe 1 – Kurzfragen

(i) Zeigen Sie für $|\,\psi\rangle = |\,a\rangle \otimes |\,b\rangle$, dass

$$\langle\psi\,|\,\psi\rangle = \langle a\,|\,a\rangle\,\langle b\,|\,b\rangle\,.$$

Betrachten Sie nun das kombinierte Stern-Gerlach und Farbmessungsexperiment vom letzten Blatt. Analog zum normalen Stern-Gerlach Experiment, definieren wir nun die Spin-Projektion in x-Richtung, sowie die Farben hellblau und dunkelblau. Die zugehörigen Operatoren im Spin- und Farbraum seien definiert als

$$S_{x,s} = \frac{1}{2}\,|+\rangle\langle-\,| + \frac{1}{2}\,|-\rangle\langle+\,|\,, \quad A_{b,f} = i\,|\,r\rangle\langle\bar{r}\,| - i\,|\,\bar{r}\rangle\langle r\,|\,.$$

(ii) Geben Sie die zugehörigen Operatoren im vollständigen Zustandsraum an.

(iii) Bestimmen Sie die normierten Eigenzustände dieser Operatoren in der kombinierten S_z und A_r Basis $|\,s_z, f_r\rangle$ vom letzten Blatt, sowie die Amplituden

$$\langle +,r\,|\,+,r\rangle\,, \quad \langle +,r\,|\,+_x,r\rangle\,, \quad \langle +,r\,|\,+,b\rangle\,, \quad \langle +,r\,|\,+_x,b\rangle\,.$$

(iv) Betrachten Sie nun die folgende Kette von Selektionsprozessen

$$S_z^+ \circ A_b^b \circ S_z^- \circ A_r^r \circ A_b^b.$$

Welche Selektionen können vertauscht werden, welche nicht?

(v) Bestimmen Sie für den eingehenden Zustand $|\,-,r\rangle$ den ausgehenden Zustand dieser Kette.

Solution

(i) By definition, the inner product on the tensor product space for the basis vectors $|\,a,i\rangle$ is given by

$$\langle a,i\,|\,b,j\rangle = \langle a\,|\,b\rangle\,\langle i\,|\,j\rangle$$

The statement follows by linearity.

(ii) Analogously to last sheet, take the tensor product with Id_i to obtain

$$S_x := S_{x,s} \otimes \mathrm{Id}_2, \quad A_b := \mathrm{Id}_1 \otimes A_{b,f}.$$

(iii) The eigenstates are given by

$$|\,+_x, f\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|-\rangle\right) \otimes |\,f\rangle$$
$$|\,-_x, f\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|-\rangle\right) \otimes |\,f\rangle$$

and

$$
\begin{aligned}
|\, s, b\rangle &= |\, s\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \,|\, r\rangle + i \frac{1}{\sqrt{2}} \,|\, \bar{r}\rangle \right) \\
|\, s, \bar{b}\rangle &= |\, s\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \,|\, r\rangle - i \frac{1}{\sqrt{2}} \,|\, \bar{r}\rangle \right).
\end{aligned}
$$

We compute

$$
\begin{aligned}
\langle +, r \,|\, +, r\rangle &= 1 & \langle +, r \,|\, +_x, r\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\langle +, r \,|\, +, b\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \langle +, r \,|\, +_x, b\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

(iv) We can commute the S and A operations, but not the operations acting on the same subsystem.

(v) The result is 0, since the orthogonal projections S_z^- and S_z^+ act in sequence.

Aufgabe 2 – Relationale Zustände und Messvorgang

In der Vorlesung haben Sie die quantenmechanische Beschreibung des Messvorgangs auf einem abstraktem Level kennengelernt. Ziel dieser Aufgabe ist es nun, diese Beschreibung anhand eines Ihnen mittlerweile gut bekannten Beispiels zu verdeutlichen.
Hierfür betrachten wir zunächst eine einzelne Stern-Gerlach-Apparatur $SG_3^{\pm}$, verbunden mit einem Detektor. Die Quelle der Apparatur emittiere nun ein einzelnes, in $\boldsymbol{e_3}$-Richtung „unpolarisiertes“ Silberatom. Falls die Messung an diesem Atom zu dem Ergebnis $|\, s_z\rangle = |\, +\rangle$ führt befinde sich der Detektor im Zustand $|\, d_+\rangle$, während er im Fall $|\, s_z\rangle = |\, -\rangle$ durch den Zustand $|\, d_-\rangle$ beschrieben werden kann. Der durch $|\, d_+\rangle$ und $|\, d_-\rangle$ aufgespannte Zustandsraum werde von nun an als $\mathscr{H}_D$ bezeichnet.

(i) Drücken Sie den Zustand des Gesamtsystems $|\, Z_1\rangle$ (Silberatom und Detektor) durch die Spin- bzw. Detektorzustände aus.

(ii) Geben Sie die zu $|\, d_+\rangle$ und $|\, d_-\rangle$ relationalen Zustände im Spin-Zustandsraum $\mathscr{H}_S$ an.

(iii) Die Spin- und Detektor-Zustände lassen sich wie folgt darstellen:

$$
|\, d_+\rangle \doteq (1,0)^T, \quad |\, d_-\rangle \doteq (0,1)^T, \quad |\, s_+\rangle \doteq (1,0)^T, \quad |\, s_-\rangle \doteq (0,1)^T
$$

Bestimmen Sie $|\, Z_1\rangle$ in dieser Darstellung.

Als nächstes wollen wir den Fall betrachten, dass nacheinander zwei Silberatome emittiert werden. Der an die Stern-Gerlach-Apparatur angeschlossene Detektor werde hierfür durch einen Zähler ersetzt. Die möglichen Zustände des Zählers, $\{|\, 0\rangle\,, |\, 1\rangle\,, |\, 2\rangle\} \subset \mathscr{H}_Z$, entsprechen der Anzahl der Atome mit „Spin $= +1/2$ “.

(iv) Drücken Sie den Zustand des Systems $|\, Z_2\rangle$ (zwei Silberatome und Zähler) durch die Spin- bzw. Zählerzustände aus.

(v) Geben Sie explizit den Zustandsraum von $|\, Z_2\rangle$ an. Welche Bedeutung hat die Reihenfolge in der Sie die Zustandsräume der Silberatome, $\mathscr{H}_S^1$ und $\mathscr{H}_S^2$, implementieren?

(vi) Geben Sie die zu $|\, 0\rangle$, $|\, 1\rangle$ und $|\, 2\rangle$ relationalen Zustände im Spin-Zustandsraum $\mathscr{H}_S^1 \otimes \mathscr{H}_S^2$ an.

(vii) Auch die Zähler-Eigenzustände können als Spaltenvektoren dargestellt werden:

$$
|\, 0\rangle \doteq (1,0,0)^T, \quad |\, 1\rangle \doteq (0,1,0)^T, \quad |\, 2\rangle \doteq (0,0,1)^T
$$

Drücken Sie $|\, Z_2\rangle$ in dieser Darstellung aus. Verwenden Sie hierbei die Basis aus (iii) um die Spin-Zustände zu beschrieben.

Solution

(i) The state-space is given by $\mathscr{H} = \mathscr{H}_d \otimes \mathscr{H}_s$ and the state is thus the tensor product

$$|\, Z_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\, d_+ \rangle \otimes |\, + \rangle + |\, d_- \rangle \otimes |\, - \rangle \right).$$

(ii) The relative state corresponding to the states of the apparatus is the corresponding state of the measured system, i.e. we find for $|\, d_+ \rangle$ the state $|\, + \rangle$ and for $|\, d_- \rangle$ the state $|\, - \rangle$.

(iii) We choose the representation

$$\begin{aligned} |\, d_+, + \rangle &= (1,0,0,0), & |\, d_+, - \rangle &= (0,1,0,0), \\ |\, d_-, + \rangle &= (0,0,1,0), & |\, d_-, - \rangle &= (0,0,0,1). \end{aligned}$$

In this representation, the state $|\, Z_1 \rangle$ is given by

$$|\, Z_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1,0,0,1).$$

(iv) The state $|\, Z_2 \rangle$ is given by

$$\begin{aligned} |\, Z_2 \rangle &= \frac{1}{2} \left(|\, 0 \rangle \otimes |\, -_1 \rangle \otimes |\, -_2 \rangle + |\, 1 \rangle \otimes |\, +_1 \rangle \otimes |\, -_2 \rangle + |\, 1 \rangle \otimes |\, -_1 \rangle \otimes |\, +_2 \rangle + |\, 2 \rangle \otimes |\, +_1 \rangle \otimes |\, +_2 \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(|\, 0,-,- \rangle + |\, 1,+,- \rangle + |\, 1,-,+ \rangle + |\, 2,+,+ \rangle \right). \end{aligned}$$

(v) If the atoms are distinguishable (and they are, since they are emitted in sequence), the order is important, i.e. the state $|\, 1,+,- \rangle$ is different from $|\, 1,-,+ \rangle$. The state space is $\mathscr{H}_Z \otimes \mathscr{H}_s^1 \otimes \mathscr{H}_s^2$.

(vi) The corresponding relative states can be read off from the expression above and are given by

$$\begin{aligned} |\, 0 \rangle &: \; |\, -,- \rangle \\ |\, 1 \rangle &: \; \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\, +,- \rangle + |\, -,+ \rangle \right) \\ |\, 2 \rangle &: \; |\, +,+ \rangle . \end{aligned}$$

(vii) The full state-space is 12-dimensional, and we fix the basis as

$$(0++, 0+-, 0-+, 0--, 1++, 1+-, 1-+, 1--, 2++, 2+-, 2-+, 2--)$$

consistent with the above representation. The state $|\, Z_2 \rangle$ is thus given by

$$|\, Z_2 \rangle = \frac{1}{2} (0,0,0,1,0,1,1,0,1,0,0,0).$$

Aufgabe 3 – Rotation von Stern-Gerlach-Zuständen

(i) Für die Rotation eines Stern-Gerlach Systems fanden wir die Darstellung einer Rotation um Winkel α um die y-Achse (in rechtshändiger Richtung) durch die unitäre Abbildung

$$U_{\hat{y}}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2}) & -\sin(\frac{\alpha}{2}) \\ \sin(\frac{\alpha}{2}) & \cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass sich diese Matrix schreiben lässt als

$$U_{\hat{y}}(\alpha) = \exp\left(-i \frac{\alpha}{2} \sigma_y \right).$$

(ii) Überzeugen Sie sich, dass die Rotationen um die x- bzw. z-Achse durch die Matrizen

$$U_{\hat{x}}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2}) & -i\sin(\frac{\alpha}{2}) \\ -i\sin(\frac{\alpha}{2}) & \cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \quad U_{\hat{z}}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2}) - i\sin(\frac{\alpha}{2}) & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\alpha}{2}) + i\sin(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}$$

gegeben sind, und zeigen Sie, dass sie diese schreiben können als

$$U_{\hat{x}}(\alpha) = \exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\sigma_x\right), \quad U_{\hat{z}}(\alpha) = \exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\sigma_z\right).$$

(iii) Für eine Rotation um eine beliebige Achse finden wir daher

$$U_{\hat{n}}(\alpha) = \exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) = \exp\left(-i\alpha\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{S}\right).$$

Finden Sie die explizite Matrixdarstellung dieser Rotation.

(iv) Betrachten Sie nun einen Zustand $|\,\psi\rangle$. Was passiert unter einer Rotation um $\alpha = 2\pi$, was unter einer Rotation um $\alpha = 4\pi$.

(v) Vergleichen Sie dieses Verhalten mit Rotationen im dreidimensionalen Raum. Was geschieht hier bei einer Rotation um Winkel 2π, was bei einer Rotation um 4π? Vergleichen Sie auch die Algebra von $SO(3)$ mit der Algebra der S_i-Operatoren.

(vi) Überlegen Sie sich, ob wir tatsächlich eine lineare Darstellung der Rotationsgruppe $SO(3)$ gefunden haben.

Solution

(i) We can compute this directly using $\sigma_y^2 = \mathbb{1}$ or by considering an infinitesimal transformation.

(ii) We can check that they give $U_x(\frac{\pi}{2})\,|+\rangle = |-_y\rangle$ and $U_z(\frac{\pi}{2})\,|+_x\rangle = e^{-\frac{i\pi}{4}}\,|+_y\rangle$.

(iii) The explicit form of this matrix can be found by using the anti-commutation relations of the Pauli matrices. We compute

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})^2 = n_i\sigma_i n_j\sigma_j = \frac{1}{2}n_i n_j[\sigma_i,\sigma_j]_+ = n_i^2\mathbb{1} = \mathbb{1}.$$

With this, the exponential separates into the cosine series times the unit matrix and the sine series times $-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$, and we find

$$\exp(-i\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{n}\cdot\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-i\frac{\alpha}{2})^k(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})^k = \sum_k \frac{1}{(2k)!}(-1)^k(\frac{\alpha}{2})^{2k}\mathrm{Id} - i\sum_k\frac{1}{(2k+1)!}(-1)^k(\frac{\alpha}{2})^{2k+1}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}.$$

Adding both matrices, we find

$$U_{\hat{n}}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2}) - in_z\sin(\frac{\alpha}{2}) & (-in_x - n_y)\sin(\frac{\alpha}{2}) \\ (-in_x + n_y)\sin(\frac{\alpha}{2}) & \cos(\frac{\alpha}{2}) + in_z\sin(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}.$$

(iv) Rotating the state $|\,\psi\rangle = c_+\,|+\rangle + c_-\,|-\rangle$ as $|\,\psi\rangle \to U\,|\,\psi\rangle$ gives

$$U(2\pi)\,|\,\psi\rangle = -\,|\,\psi\rangle, \quad U(4\pi)\,|\,\psi\rangle = |\,\psi\rangle.$$

A rotation by angle 2π gives a minus sign, i.e. we do not get the identity operation after a rotation by 2π. We do, however, obtain the identity after a rotation by 4π.

(v) In 3-dimensional Euclidean space, a rotation by 2π already gives the identity operation. We do not need to rotate twice. But we also see (from previous sheets), that the algebra of S_i agrees with the one of the classical angular momentum, which was the $SO(3)$ algebra.

(vi) We see that while we agree infinitesimally with $SO(3)$, i.e. we have the same algebra, the global properties of the generated group are quite different. But a rotation by 2π gets mapped to $-\mathrm{Id}$, so this generated representation is not a linear one of $SO(3)$, but rather a projective one (more on that later). It is, however, a unitary, linear representation of $SU(2)$, which is the double covering of $SO(3)$, hence this representation is equivalent to the projective one of $SO(3)$.

Basically, we cannot force the representations of $SO(3)$ for the quantum mechanical angular momentum to be unitary, it is enough for them to be projective to not destroy the probabilistic interpretation (due to the construction of the projective Hilbert space when considering rays instead of single states).

These projective representations can now be related bijectively to linear representations of central extensions of the symmetry group in question. For $SU(N)$, there are no non-trivial central extensions, so the projective one is equivalent to the unitary representation. For $SO(N)$, however, there exist discrete central extensions, but these central extensions are the universal covering groups. Hence we can study projective representations of $SO(3)$ by considering unitary representations of the covering group $SU(2)$. (Examples for a non-trivial central extension are e.g. in CFT/String the Witt and Virasoro algebras).