

Übungen zur Quantenmechanik (T2)

Übungsblatt 7, Besprechung vom 29.11 – 03.12

Aufgabe 1 – Kurzfragen

- (i) Rechtfertigen Sie die Schreibweise eines Produktzustands in Form eines Kets, d.h. $|a, b\rangle := |a\rangle \otimes |b\rangle$ durch das innere Produkt.
- (ii) Betrachten Sie wie bisher Silberatome mit Spin, beschrieben durch ein Zwei-Zustandssystem $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Zwei unterscheidbare Atome A und B befinden sich im Zustand $|\psi\rangle = |a\rangle_A \otimes |b\rangle_B =: |a, b\rangle$. Können Sie die folgenden Zustände so beschreiben?
- a) $|\psi_1\rangle = \frac{1}{2} (i|0, 0\rangle + |0, 1\rangle - |1, 0\rangle + i|1, 1\rangle)$
- b) $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle - |0, 1\rangle)$
- (iii) Führen Sie nun für die jeweiligen Zustände eine Messung des Spins an Atom A durch. Welche qualitativen Aussagen können Sie über Atom B machen?
- (iv) Diskutieren Sie, ob obige Resultate in einer klassischen Beschreibung des Experiments möglich sind.

Aufgabe 2 – Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Wir wollen nun, unter Zuhilfenahme der Wahrscheinlichkeitsinterpretation, unsere Diskussion des Stern-Gerlach-Experiments abschließen.

Auf Blatt 6 haben Sie gezeigt, dass ein System, bestehend aus einem Silberatom und einem Detektor, durch den folgenden Zustand beschrieben werden kann

$$|Z_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|d_+\rangle \otimes |+\rangle + |d_-\rangle \otimes |-\rangle). \quad (1)$$

- (i) Machen Sie sich zunächst klar, dass diese Beschreibung einem perfekten Detektor entspricht. Berechnen Sie hierzu die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlmessung, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass die Messung des Spins des oben beschriebenen Atoms zum Ergebnis $\pm 1/2$ führt, der Detektor aber im Zustand $|d\rangle = |d_{\mp}\rangle$ vorgefunden wird.
- (ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung am durch den Zustand (1) beschriebenen System, die Detektorzustände $|d\rangle = |d_{\pm}\rangle$ zu finden.
- (iii) Verallgemeinern Sie Ihre Erkenntnisse aus den Teilaufgaben (i) und (ii) auf das ebenfalls auf Blatt 6 beschriebene Szenario zweier nacheinander emittierter Silberatome.

Im Folgenden werden wir die Wahrscheinlichkeitsinterpretation verwenden, um eine geringfügig kompliziertere Version des Stern-Gerlach-Experiments mit einem einzelnen Silberatom zu diskutieren. Hierzu wollen wir einen neuen Detektor betrachten. Dessen Hilbertraum $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ werde durch die beiden Zustände $|d_+\rangle$ (Atom mit $|s\rangle = |+\rangle$ erfolgreich detektiert) und $|\overline{d_+}\rangle$ (kein solches Atom gefunden) aufgespannt. Anders als bisher habe dieser Detektor einen Messfehler: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Atom mit $|s\rangle = |+\rangle$ zum Detektorzustand $|d_+\rangle$ führt, sei lediglich $p = 1 - \varepsilon$, mit $0 < \varepsilon < 1$.

- (iv) Durch welchen Zustand kann ein System, bestehend aus einem Silberatom mit $|s\rangle = |+\rangle$ zusammen mit diesem Detektor beschrieben werden?
- (v) Verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe (iv) auf ein System mit einem Silberatom beliebigen Spins.
- (vi) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Messung an einem Atom, beschrieben durch diesen Zustand, zu den Detektorzuständen $|d_+\rangle$ bzw. $|\overline{d_+}\rangle$ führt.
- (vii) Betrachten Sie nun den Fall, dass die Messung an einem Atom zum Detektorzustand $|\overline{d_+}\rangle$ führe. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das untersuchte Atom im Zustand $|s\rangle = |-\rangle$?