Prof. Dr. Stefan Hofmann | Wintersemester 2018/19

Übungen zur Quantenmechanik (T2)

Übungsblatt 6, Besprechung vom 22.11 – 26.11

Aufgabe 1 – Kurzfragen

(i) Rechtfertigen Sie die Schreibweise eines Produktzustands in Form eines Kets, d.h. $|\, a, b\rangle := |\, a\rangle \otimes |\, b\rangle$ durch das innere Produkt.

(ii) Betrachten Sie wie bisher Silberatome mit Spin, beschrieben durch ein Zwei-Zustandssystem $\{|\, 0\rangle\,, |\, 1\rangle\}$. Zwei unterscheidbare Atome A und B befinden sich im Zustand $|\, \psi\rangle = |\, a\rangle_A \otimes |\, b\rangle_B =: |\, a, b\rangle$. Können Sie die folgenden Zustände so beschreiben?

a) $|\, \psi_1\rangle = \frac{1}{2}\left(i\,|\, 0,0\rangle + |\, 0,1\rangle - |\, 1,0\rangle + i\,|\, 1,1\rangle\right)$

b) $|\, \psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\, 1,0\rangle - |\, 0,1\rangle\right)$

(iii) Führen Sie nun für die jeweiligen Zustände eine Messung des Spins an Atom A durch. Welche qualitativen Aussagen können Sie über Atom B machen?

(iv) Diskutieren Sie, ob obige Resultate in einer klassischen Beschreibung des Experiments möglich sind.

Solution

(i) Consider the product state from the lecture $|\, Z\rangle = \sum_{a,b} c_{ab}\,|\, A_a, Q_b\rangle$. The inner product is then given by

$$\langle Z\,|\, Z\rangle = \sum_{a,b,c,d} c_{ab}c^*_{cd}\,\langle A_c, Q_d\,|\, A_a, Q_b\rangle = \sum_{a,b,c,d} c_{ab}c^*_{cd}\,\langle A_c\,|\, A_a\rangle\,\langle Q_d\,|\, Q_b\rangle = \sum_{a,b} |c_{ab}|^2 \tag{1}$$

where we used the orthonormality of the subsystems in the last step. Whereas when we use a representation for the product state we end up with a matrix which we want to rewrite as a vector:

$$|\, Z\rangle = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & \dots \\ c_{12} & c_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & c_{nm} \end{pmatrix} \to |\, Z_c\rangle = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \dots \\ c_{1n} \\ c_{22} \\ \dots \\ c_{nm} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Then we find for the inner product

$$\langle Z_c\,|\, Z_c\rangle = \sum_{a,b} |c_{ab}|^2 \tag{3}$$

which agrees with the result before.

(ii)

$$(a\,|\, 1\rangle + b\,|\, 0\rangle) \otimes (c\,|\, 1\rangle + d\,|\, 0\rangle) = ac\,|\, 11\rangle + bc\,|\, 01\rangle + ad\,|\, 10\rangle + bd\,|\, 00\rangle \tag{4}$$

a)

$$2bd = 2ac = i \quad 2bc = 1 \quad 2ad = -1 \tag{5}$$
$$\to a = 1, b = -i, c = \frac{i}{2}, d = -\frac{1}{2} \tag{6}$$

b)

$$2bd = 2ac = 0 \quad \sqrt{2}bc = -1 \quad \sqrt{2}ad = 1 \tag{7}$$

For which there is no solution since the first two conditions give $a = d = 0$ which contradicts the last condition. Therefore, we call the second state entangled.

(iii) For the second state a measurement with a Stern-Gerlach apparatus of particle A we can already tell what a similar measurement of particle B would result in:

$$|\, a\rangle_A = |\, 1\rangle \to |\, b\rangle_B = |\, 0\rangle_B \tag{8}$$
$$|\, a\rangle_A = |\, 0\rangle \to |\, b\rangle_B = |\, 1\rangle_B \tag{9}$$

We encounter this property the first time in our course of classical mechanics and quantum mechanics and since these states can be manufactured in experiments they are a serious threat to local realism.

(iv) See the discussion about EPR in the lecture.

Aufgabe 2 – Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Wir wollen nun, unter Zuhilfenahme der Wahrscheinlichkeitsinterpretation, unsere Diskussion des Stern-Gerlach-Experiments abschlieSSen.
Auf Blatt 6 haben Sie gezeigt, dass ein System, bestehend aus einem Silberatom und einem Detektor, durch den folgenden Zustand beschrieben werden kann

$$|\, Z_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\, d_+\rangle \otimes |\, +\rangle + |\, d_-\rangle \otimes |\, -\rangle\,\big). \tag{10}$$

(i) Machen Sie sich zunächst klar, dass diese Beschreibung einem perfekten Detektor entspricht. Berechnen Sie hierzu die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlmessung, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass die Messung des Spins des oben beschriebenen Atoms zum Ergebnis $\pm 1/2$ führt, der Detektor aber im Zustand $|\, d\rangle = |\, d_\mp\rangle$ vorgefunden wird.

(ii) Berechnen Sie die Wahscheinlichkeit, bei einer Messung am durch den Zustand (10) beschriebenen System, die Detektorzustände $|\, d\rangle = |\, d_\pm\rangle$ zu finden.

(iii) Verallgemeinern Sie Ihre Erkenntnisse aus den Teilaufgaben (i) und (ii) auf das ebenfalls auf Blatt 6 beschriebene Szenario zweier nacheinander emittierter Silberatome.

Im Folgenden werden wir die Wahrscheinlichkeitsinterpretation verwenden, um eine geringfügig kompliziertere Version des Stern-Gerlach-Experiments mit einem einzelnen Silberatom zu diskutieren. Hierzu wollen wir einen neuen Detektor betrachten. Dessen Hilbertraum $\mathcal{H}_{\mathcal{D}'}$ werde durch die beiden Zustände $|\, d_+\rangle$ (Atom mit $|\, s\rangle = |\, +\rangle$ erfolgreich detektiert) und $\big|\, \overline{d_+}\big\rangle$ (kein solches Atom gefunden) aufgespannt. Anders als bisher habe dieser Detektor einen Messfehler: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Atom mit $|\, s\rangle = |\, +\rangle$ zum Detektorzustand $|\, d_+\rangle$ führt, sei lediglich $p = 1 - \varepsilon$, mit $0 < \varepsilon < 1$.

(iv) Durch welchen Zustand kann ein System, bestehend aus einem Silberatom mit $|\, s\rangle = |\, +\rangle$ zusammen mit diesem Detektor beschrieben werden?

(v) Verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe (iv) auf ein System mit einem Silberatom beliebigen Spins.

(vi) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Messung an einem Atom, beschrieben durch diesen Zustand, zu den Detektorzuständen $|\, d_+\rangle$ bzw. $\big|\, \overline{d_+}\big\rangle$ führt.

(vii) Betrachten Sie nun den Fall, dass die Messung an einem Atom zum Detektorzustand $\big|\, \overline{d_+}\big\rangle$ führe. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das untersuchte Atom im Zustand $|\, s\rangle = |\, -\rangle$?

Solution

(i) $|(\langle d_\pm | \otimes \langle \mp |) \cdot | Z_1 \rangle|^2 = \cdots = 0$

(ii) $p(| d_\pm \rangle) = p(| d_\pm \rangle \otimes | + \rangle) + p(| d_\pm \rangle \otimes | - \rangle) = \cdots = 1/2$

(iii) Condition for perfect detector: $0 = p(| - \rangle \otimes | - \rangle \otimes | 1 \rangle) = p(| - \rangle \otimes | - \rangle \otimes | 2 \rangle) = \ldots$
$\Rightarrow |\langle * | Z_2 \rangle|^2 = \cdots = 0$, where the star refers to any of the states mentioned in the line above

(iv) $| \Psi \rangle = \sqrt{1-\varepsilon}\, | d_+ \rangle \otimes | + \rangle + \sqrt{\varepsilon}\, | \overline{d_+} \rangle \otimes | + \rangle$

(v) $| \Psi \rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Big(\big(\sqrt{1-\varepsilon}\, | d_+ \rangle + \sqrt{\varepsilon}\, | \overline{d_+} \rangle\big) \otimes | + \rangle + | \overline{d_+} \rangle \otimes | - \rangle \Big)$

(vi) $p(| d_+ \rangle) = p(| d_+ \rangle \otimes | + \rangle) + p(| d_+ \rangle \otimes | - \rangle) = \cdots = \dfrac{1-\varepsilon}{2}$

$p(| \overline{d_+} \rangle) = \text{[basically same as above]} = \dfrac{1+\varepsilon}{2}$

(vii) Before measurement: $| \Psi \rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \big(| \overline{d_+} \rangle \otimes (\sqrt{\varepsilon}\, | + \rangle + | - \rangle) + | d_+ \rangle \otimes (\text{irrelevant}) \big)$

After measurement: $| \Psi' \rangle = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} | \overline{d_+} \rangle \otimes (\sqrt{\varepsilon}\, | + \rangle + | - \rangle)$, hence $p(| - \rangle) = \dfrac{1}{1+\varepsilon}$