Prof. Dr. Stefan Hofmann Wintersemester 2018/19

Übungen zur Quantenmechanik (T2)

Übungsblatt 8, Besprechung vom 06.12 – 10.12

Aufgabe 1 – Kurzfragen

(i) Zeigen Sie, dass zwei hermitesche Matrizen genau dann simultan diagonalisierbar sind, wenn sie kommutieren. Simultane Diagonalisierbarkeit zweier Matrizen A, B bedeutet, dass wir eine invertierbare Matrix S finden können, so dass $S^{-1}AS$ und $S^{-1}BS$ diagonal sind.

In Bra-ket Notation bezeichnen wir eine solche Eigenbasis zweier kommutierender Operatoren A, B als $|\, a, b\rangle$, so dass

$$A\,|\, a, b\rangle = a\,|\, a, b\rangle\,, \quad B\,|\, a, b\rangle = b\,|\, a, b\rangle\,.$$

Wir können also beide Eigenwerte benutzen, um das System zu charakterisieren. Eie korrekte Wahl des Zustandsraumes und der Observablen ist daher entscheidend für eine korrekte Beschreibung quantenmechanischer Phänomene. Wir überprüfen dies im Folgenden explizit am Beispiel von Aschenputtel und Stern-Gerlach.

(ii) Betrachten Sie ein System von Farbkörnern und Aschenputtels. Wir definieren die Farbe als Messergebnis einer Aschenputtel-Messung, d.h. die Farben hellrot, dunkelrot, hellblau und dunkelblau entsprechen Eigenzustände der Aschenputteloperatoren A_r, A_b. Wir wissen, dass die Reihenfolge der Messung der Farben keine Rolle spielt. Was können Sie damit über den Zustandsraum aussagen? Geben Sie eine Basis des Zustandsraums bestehend aus den Eigenvektoren der Aschenputtel-Operatoren an und bestimmen Sie damit die Dimension des Zustandsraums.

(iii) Wiederholen Sie diese Überlegungen für das Stern-Gerlach Experiment. Achten Sie hierbei darauf, dass Spin-Messungen in verschiedene Raumrichtungen nicht kommutieren. Was impliziert dies für die Dimension des Zustandsraums? Geben Sie eine Basis bestehend aus den Eigenvektoren der Spin-Operatoren an.

(iv) Was ist der entscheidende Unterschied zwischen der Zustandsbeschreibung mit Aschenputtel und der Zustandsbeschreibung im Stern-Gerlach Experiment? Folgern Sie daraus, welche Bedingungen Sie an „fundamentale Eigenschaften“, wie Spin, Ladung, Masse, usw. (sogenannte Quantenzahlen) stellen müssen, so dass diese eine sinnvolle Beschreibung des Systems liefern.

Aufgabe 2 – EPR-Experiment und verborgene Parameter

In dieser Aufgabe betrachten wir das EPR-Experiment, und versuchen die scheinbare nicht-lokalität durch verstecke Parameter zu erklären. Wie auf Blatt 6 präparieren wir für das EPR-Experiment den folgenden Zustand zweier verschränkter Silberatome

$$|\,\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\,1,0\rangle - |\,0,1\rangle\right).$$

Die Atome fliegen in entgegengesetzter Richtung, bis sie jeweils auf eine Stern-Gerlach Apparatur links bzw. rechts treffen. Die Ausrichtung der linken bzw. rechten Stern-Gerlach Apparaturen wird durch die Einheitsvektoren $\hat{\boldsymbol{n}}_a$ und $\hat{\boldsymbol{n}}_b$ beschrieben. Nun wollen wir Korrelationen dieser Messungen berechnen und diese mit dem Ergebnis einer Theorie mit verborgenen Parametern vergleichen.

(i) Berechnen sie

$$C_q(a, b) := \langle \psi \,|\, \hat{\boldsymbol{n}}_a \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \hat{\boldsymbol{n}}_b \cdot \boldsymbol{\sigma} \,|\, \psi \rangle = -\hat{\boldsymbol{n}}_a \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_b$$

(ii) Überlegen Sie sich eine Reihe von Experimenten mit Einstellungen der Stern-Gerlach Apparaturen a, a' für das linke Atom und b, b' für das rechte Atom, sodass

$$C_q(a, b) + C_q(a', b') + C_q(a', b) - C_q(a, b') = 2\sqrt{2}$$

(iii) Nun untersuchen wir, ob die Einführung einer verborgenen Variable λ uns erlaubt, dieses Ergebnis der Quantenmechanik zu verstehen. Der Erwartungswert einer Variablen X muss bei einer Messung über λ gemittelt werden, da diese experimentell nicht zugänglich ist

$$E(X) = \int \mathrm{d}\lambda X(\lambda) p(\lambda),$$

wobei $\int \mathrm{d}\lambda p(\lambda) = 1$ durch eine Gewichtung mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte p gewährleistet wird. Analog zu den vorherigen Korrelationsfunktionen definieren wir

$$C_V(a, b) = E\left(L(\hat{\boldsymbol{n}}_a, \lambda) R(\hat{\boldsymbol{n}}_b, \lambda)\right)$$

wobei L und R eine Messung einer Variablen für das linke bzw. rechte Atom darstellt. Zeigen Sie

$$C_V(a, b) + C_V(a', b') + C_V(a', b) - C_V(a, b') \leq 2.$$

(iv) Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 3 – Schrödingers Katze

Diese Aufgabe soll der Verdeutlichung einiger quantenmechanischer Konzepte am Beispiel von „Schrödingers Katze " dienen.
In einem geschlossenen Raum befinde sich ein instabiler Atomkern, der innerhalb einer bestimmten Zeitspanne mit der Wahrscheinlichkeit $p < 1$ zerfalle. Dieser Zerfall werde von einem Geigerzähler gemessen. Im Falle einer solchen Messung werde Giftgas freigesetzt, das eine im Raum befindliche Katze töte.

(i) Im populärwissenschaftlichen Kontext ist Ihnen vermutlich bereits die Aussage begegnet, die Katze sei bis zur Messung „*gleichzeitig* tot und lebendig ". Machen Sie sich zunächst klar, wieso diese Aussage aus einer rein klassischen Perspektive problematisch ist.

Nun wollen wir die quantenmechanische Perspektive dieses Experiments näher untersuchen. Der Zustand der Giftvorrichtung $|G\rangle$ sei Element des Zustandsraums $\mathcal{H}_G$. Dieser werde aufgespannt durch die Zustände $|f\rangle$ (das Gift wurde freigesetzt) und $|\bar{f}\rangle$ (das Gift wurde nicht freigesetzt).

(ii) Bestimmen Sie den Zustand der Giftapparatur unter Vernachlässigung ihrer Wechselwirkung mit der Katze. Dies kann so verstanden werden, dass die Katze als klassischer Beobachter fungiert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit führt die „Messung " der Katze zum Ergebnis „das Gift wurde freigesetzt "?

(iii) Inwiefern unterscheidet sich Ihr Ergebnis von einer rein klassischen Beschreibung? Wie stimmt es mit dieser überein?

Nun wollen wir die quantenmechanische Beschreibung des Systems weiter ausweiten, indem wir auch die Katze durch einen Zustand $|\text{🐱?}\rangle$ beschreiben. Die Zustände $|\text{😵}\rangle$ (Katze tot) und $|\text{🐱}\rangle$ (Katze lebt) bilden eine Basis des Zustandsraums der Katze $\mathcal{H}_K$.

(iv) Bestimmen Sie den Zustand des Systems Katze-Giftapparatur. Nehmen Sie nun an, Sie öffnen die Box. Mit welcher Wahrscheinlichkeit finden Sie eine lebendige Katze, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine tote Katze?

(v) Warum erscheint die Beschreibung des Systems durch den Zustand aus Teilaufgabe (iv) aus klassischer Perspektive paradox?

(vi) Beurteilen Sie nun die Aussage, die durch den obigen Zustand beschriebene Katze sei *gleichzeitig* tot und lebendig. Welche Formulierung wäre zutreffender?

Abschließend wollen wir die quantenmechanische Beschreibung vervollständigen, indem wir auch uns selbst einen Zustand $|B\rangle \in \mathcal{H}_B$ zuordnen. Dazu nehmen wir an, dass wir uns beim Auffinden einer lebenden Katze im Zustand $|☺\rangle$ befinden, während einer toten Katze der Zustand $|☹\rangle$ zugeordnet wird.

(vii) Finden Sie den Zustand des Systems Beobachter-Katze-Giftapparatur.

(viii) Vergleichen Sie diesen Zustand mit dem aus Teilaufgabe (iv). Besteht das vermeintliche Paradox weiterhin?