Prof. Dr. Stefan Hofmann Wintersemester 2018/19

# Übungen zur Quantenmechanik (T2)

## Übungsblatt 8, Besprechung vom 06.12 – 10.12

## Aufgabe 1 – Kurzfragen

(i) Zeigen Sie, dass zwei hermitesche Matrizen genau dann simultan diagonalisierbar sind, wenn sie kommutieren. Simultane Diagonalisierbarkeit zweier Matrizen $A, B$ bedeutet, dass wir eine invertierbare Matrix $S$ finden können, so dass $S^{-1}AS$ und $S^{-1}BS$ diagonal sind.

In Bra-ket Notation bezeichnen wir eine solche Eigenbasis zweier kommutierender Operatoren $A$, $B$ als $|\, a, b\rangle$, so dass

$$A\,|\,a,b\rangle = a\,|\,a,b\rangle\,, \quad B\,|\,a,b\rangle = b\,|\,a,b\rangle\,.$$

Wir können also beide Eigenwerte benutzen, um das System zu charakterisieren. Eie korrekte Wahl des Zustandsraumes und der Observablen ist daher entscheidend für eine korrekte Beschreibung quantenmechanischer Phänomene. Wir überprüfen dies im Folgenden explizit am Beispiel von Aschenputtel und Stern-Gerlach.

(ii) Betrachten Sie ein System von Farbkörnern und Aschenputtels. Wir definieren die Farbe als Messergebnis einer Aschenputtel-Messung, d.h. die Farben hellrot, dunkelrot, hellblau und dunkelblau entsprechen Eigenzustände der Aschenputteloperatoren $A_r$, $A_b$. Wir wissen, dass die Reihenfolge der Messung der Farben keine Rolle spielt. Was können Sie damit über den Zustandsraum aussagen? Geben Sie eine Basis des Zustandsraums bestehend aus den Eigenvektoren der Aschenputtel-Operatoren an und bestimmen Sie damit die Dimension des Zustandsraums.

(iii) Wiederholen Sie diese Überlegungen für das Stern-Gerlach Experiment. Achten Sie hierbei darauf, dass Spin-Messungen in verschiedene Raumrichtungen nicht kommutieren. Was impliziert dies für die Dimension des Zustandsraums? Geben Sie eine Basis bestehend aus den Eigenvektoren der Spin-Operatoren an.

(iv) Was ist der entscheidende Unterschied zwischen der Zustandsbeschreibung mit Aschenputtel und der Zustandsbeschreibung im Stern-Gerlach Experiment? Folgern Sie daraus, welche Bedingungen Sie an „fundamentale Eigenschaften“, wie Spin, Ladung, Masse, usw. (sogenannte Quantenzahlen) stellen müssen, so dass diese eine sinnvolle Beschreibung des Systems liefern.

## Solution

(i) We show that $A$, $B$ simultaneously diagonalisable $\Leftrightarrow [A, B] = 0$.
**Proof:**“$\Rightarrow$” Suppse $A$ and $B$ are simultaneously diagonalisable, i.e. there exists a non-singular matrix $S$ such that $S^{-1}AS$ and $S^{-1}BS$ are diagonal. Then

$$[A, B] = [SD_AS^{-1}, SD_BS^{-1}] = S[D_A, D_B]S^{-1} = 0,$$

since two diagonal matrices commute.
“$\Leftarrow$” Suppose that $[A, B] = 0$. We then know that the eigenspaces of $A$ are invariant under $B$, and vice-versa, since for $v \in \mathrm{Eig}_A(\lambda)$, we have

$$A(Bv) = BAv = \lambda(Bv)$$

so $Bv \in \mathrm{Eig}_A(\lambda)$. The eigenspace is thus an invariant subspace of both $A$ and $B$. Hermitian operators are diagonalisable, and the restrictions of diagonalisable operators onto invariant subspaces are again diagonalisable. Now we can conclude the result. Since $A$ is diagonalisable, we can decompose the vector space $V$ into a direct sum of eigenspaces $\mathrm{Eig}_A(\lambda)$ by the spectral theorem. Each of the eigenspaces is invariant under $B$, and the restriction of $B$ on these subspaces is still diagonalisable, and we can construct a basis for each $\mathrm{Eig}_A(\lambda)$ of eigenvectors of $B$. By definition, these vectors are then also eigenvectors of $A$ with eigenvalue $\lambda$. Hence we constructed a simultaneous eigenbasis of $A$ and $B$ and conclude that in this basis, both matrices are diagonal.
Note that we can immediately generalise this to any finite number of commuting Hermitian operators by inductively performing the above steps.

(ii) To model this system, we span the state-space by the linearly independent vectors $|\, r, b\rangle$, $|\, \bar{r}, b\rangle$, $|\, r, \bar{b}\rangle$, $|\, \bar{r}, \bar{b}\rangle$, which are simultaneous eigenvectors of $A_r$ and $A_b$. The state-space is 4-dimensional and, most importantly, this is due to the fact that we can measure both colors simultaneously.

(iii) We can choose one spin-direction as the basis of the state-space, say $S_z$, i.e. we span the state-space by $|\, +\rangle$ and $|\, -\rangle$. The other spin measurements do not commute with $S_z$, and their eigenstates are a linear combination of $|\, +\rangle, |\, -\rangle$. The state-space is thus only two-dimensional, and $S_z$ and $S_x$ cannot both be used as labels of the states, since we cannot measure them simultaneously.

(iv) The difference of both systems is the choice of commuting observables that we use to label the quantum states. When describing a quantum system, we have to decide on good labels to use to completely determine the quantum state. These labels correspond directly to the complete set of commuting observables characterising the system. (More details on this will be in the lecture soon). In the first example, we decided that both labels, red and blue, should be quantum numbers, and we were forced to use a 4-dimensional state-space to enable this choice. In the Stern-Gerlach case, we found that both measurements, $S_z$ and $S_x$, are not compatible, and we decided to only take $S_z$ as complete set of observables. Hence we have to choose a two-dimensional state-space to model the system.
In general, when we wish to model quantum phenomena, we have to first decide on which set of commuting observables to choose. These observables then make up the "good" quantum numbers, that can all be measured simultaneously at any point in time. We conclude that any "fundamental" quantum numbers must be related to an observable in this complete set. Often, they are related to the underlying space-time symmetry algebra (like mass, momentum, spin, ...), but they can also be simply symmetries of the quantum system (like $SU(n)$ for the $n$-dimensional Harmonic Oscillator, or quantum numbers in nuclear/particle physics related to intrinsic symmetries.)

## Aufgabe 2 – EPR-Experiment und verborgene Parameter

In dieser Aufgabe betrachten wir das EPR-Experiment, und versuchen die scheinbare nicht-lokalität durch verstecke Parameter zu erklären. Wie auf Blatt 6 präparieren wir für das EPR-Experiment den folgenden Zustand zweier verschränkter Silberatome

$$|\, \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\, 1, 0\rangle - |\, 0, 1\rangle\right).$$

Die Atome fliegen in entgegengesetzter Richtung, bis sie jeweils auf eine Stern-Gerlach Apparatur links bzw. rechts treffen. Die Ausrichtung der linken bzw. rechten Stern-Gerlach Apparaturen wird durch die Einheitsvektoren $\hat{\boldsymbol{n}}_a$ und $\hat{\boldsymbol{n}}_b$ beschrieben. Nun wollen wir Korrelationen dieser Messungen berechnen und diese mit dem Ergebnis einer Theorie mit verborgenen Parametern vergleichen.

(i) Berechnen sie

$$C_q(a, b) := \langle \psi \,|\, \hat{\boldsymbol{n}}_a \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \hat{\boldsymbol{n}}_b \cdot \boldsymbol{\sigma} \,|\, \psi \rangle = -\hat{\boldsymbol{n}}_a \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_b$$

(ii) Überlegen Sie sich eine Reihe von Experimenten mit Einstellungen der Stern-Gerlach Apparaturen $a$, $a'$ für das linke Atom und $b$, $b'$ für das rechte Atom, sodass

$$C_q(a, b) + C_q(a', b') + C_q(a', b) - C_q(a, b') = 2\sqrt{2}$$

(iii) Nun untersuchen wir, ob die Einführung einer verborgenen Variable $\lambda$ uns erlaubt, dieses Ergebnis der Quantenmechanik zu verstehen. Der Erwartungswert einer Variablen $X$ muss bei einer Messung über

$\lambda$ gemittelt werden, da diese experimentell nicht zugänglich ist

$$E(X) = \int \mathrm{d}\lambda X(\lambda) p(\lambda),$$

wobei $\int \mathrm{d}\lambda p(\lambda) = 1$ durch eine Gewichtung mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte $p$ gewährleistet wird. Analog zu den vorherigen Korrelationsfunktionen definieren wir

$$C_V(a,b) = E\left(L(\hat{\boldsymbol{n}}_a, \lambda) R(\hat{\boldsymbol{n}}_b, \lambda)\right)$$

wobei $L$ und $R$ eine Messung einer Variablen für das linke bzw. rechte Atom darstellt. Zeigen Sie

$$C_V(a,b) + C_V(a',b') + C_V(a',b) - C_V(a,b') \leq 2.$$

(iv) Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

## Solution

(i) Computing $C_q(a,b)$ explicitly, using $\boldsymbol{n} \cdot \sigma = \begin{pmatrix} n_3 & n_1 - in_2 \\ n_1 + in_2 & -n_3 \end{pmatrix}$ we find indeed

$$\begin{aligned} C_q(a,b) = \frac{1}{2} & \left( \langle 1 \,|\, \boldsymbol{n}_a \cdot \boldsymbol{\sigma} \,|\, 1 \rangle \langle 0 \,|\, \boldsymbol{n}_b \cdot \boldsymbol{\sigma} \,|\, 0 \rangle + \langle 0 \,|\, \boldsymbol{n}_a \cdot \boldsymbol{\sigma} \,|\, 0 \rangle \langle 1 \,|\, \boldsymbol{n}_b \cdot \boldsymbol{\sigma} \,|\, 1 \rangle \right. \\ & \left. - \langle 1 \,|\, \boldsymbol{n}_a \cdot \boldsymbol{\sigma} \,|\, 0 \rangle \langle 0 \,|\, \boldsymbol{n}_b \cdot \boldsymbol{\sigma} \,|\, 1 \rangle - \langle 0 \,|\, \boldsymbol{n}_a \cdot \boldsymbol{\sigma} \,|\, 1 \rangle \langle 1 \,|\, \boldsymbol{n}_b \cdot \boldsymbol{\sigma} \,|\, 0 \rangle \right) \\ = & -\boldsymbol{n}_a \cdot \boldsymbol{n}_b. \end{aligned}$$

(ii) This can be achieved by choosing for Alice a $S_z$ and $S_x$ measurement, and for Bob a $-\frac{1}{\sqrt{2}}(S_z + S_x)$ and a $\frac{1}{\sqrt{2}}(S_z - S_x)$ measurement. This corresponds to $n_a = e_z$, $n_{a'} = e_x$, $n_b = -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_z + e_x)$ and $n_{b'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_z - e_x)$. This gives indeed

$$C_q(a,b) + C_q(a',b') + C_q(a',b) - C_q(a,b') = 2\sqrt{2}.$$

(iii) We write this expression explicitly (with short-hand notation, neglecting the dependence on $a, b, \lambda$)

$$C_V(a,b) + C_V(a',b') + C_V(a',b) - C_V(a,b') = \int \mathrm{d}\lambda p(\lambda) \left(LR + L'R' + L'R - LR'\right).$$

After factorising this expression

$$\int \mathrm{d}\lambda p(\lambda) \left(LR + L'R' + L'R - LR'\right) = \int \mathrm{d}\lambda p(\lambda) \left(L(R - R') + L'(R + R')\right),$$

note that each $L, R, L', R'$ takes values $\pm 1$, and we see that either $R + R' = 2$ and $R - R' = 0$ or vice-versa. The integration over $\lambda$ then gives 1 since the probability distribution $p$ is normalised. We can thus estimate this correlator to be $\leq 2$ and obtain

$$C_V(a,b) + C_V(a',b') + C_V(a',b) - C_V(a,b') \leq 2.$$

(iv) We see that a local hidden-variable theory cannot reproduce the correlations we can find quantum mechanically, so QM is fundamentally different from such a theory (i.e. it cannot be described by classical physics with some hidden variables).

## Aufgabe 3 – Schrödingers Katze

Diese Aufgabe soll der Verdeutlichung einiger quantenmechanischer Konzepte am Beispiel von „Schrödingers Katze " dienen.
In einem geschlossenen Raum befinde sich ein instabiler Atomkern, der innerhalb einer bestimmten Zeitspanne mit der Wahrscheinlichkeit $p < 1$ zerfalle. Dieser Zerfall werde von einem Geigerzähler gemessen. Im Falle einer solchen Messung werde Giftgas freigesetzt, das eine im Raum befindliche Katze töte.

(i) Im populärwissenschaftlichen Kontext ist Ihnen vermutlich bereits die Aussage begegnet, die Katze sei bis zur Messung „*gleichzeitig* tot und lebendig ". Machen Sie sich zunächst klar, wieso diese Aussage aus einer rein klassischen Perspektive problematisch ist.

Nun wollen wir die quantenmechanische Perspektive dieses Experiments näher untersuchen. Der Zustand der Giftvorrichtung $|\,G\rangle$ sei Element des Zustandsraums $\mathcal{H}_G$. Dieser werde aufgespannt durch die Zustände $|\,f\rangle$ (das Gift wurde freigesetzt) und $|\,\bar{f}\rangle$ (das Gift wurde nicht freigesetzt).

(ii) Bestimmen Sie den Zustand der Giftapparatur unter Vernachlässigung ihrer Wechselwirkung mit der Katze. Dies kann so verstanden werden, dass die Katze als klassischer Beobachter fungiert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit führt die „Messung " der Katze zum Ergebnis „das Gift wurde freigesetzt "?

(iii) Inwiefern unterscheidet sich Ihr Ergebnis von einer rein klassischen Beschreibung? Wie stimmt es mit dieser überein?

Nun wollen wir die quantenmechanische Beschreibung des Systems weiter ausweiten, indem wir auch die Katze durch einen Zustand $|\,\text{🐱?}\rangle$ beschreiben. Die Zustände $|\,\text{🐱×}\rangle$ (Katze tot) und $|\,\text{🐱}\rangle$ (Katze lebt) bilden eine Basis des Zustandsraums der Katze $\mathcal{H}_K$.

(iv) Bestimmen Sie den Zustand des Systems Katze-Giftapparatur. Nehmen Sie nun an, Sie öffnen die Box. Mit welcher Wahrscheinlichkeit finden Sie eine lebendige Katze, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine tote Katze?

(v) Warum erscheint die Beschreibung des Systems durch den Zustand aus Teilaufgabe (iv) aus klassischer Perspektive paradox?

(vi) Beurteilen Sie nun die Aussage, die durch den obigen Zustand beschriebene Katze sei *gleichzeitig* tot und lebendig. Welche Formulierung wäre zutreffender?

Abschließend wollen wir die quantenmechanische Beschreibung vervollständigen, indem wir auch uns selbst einen Zustand $|\,B\rangle \in \mathcal{H}_B$ zuordnen. Dazu nehmen wir an, dass wir uns beim Auffinden einer lebenden Katze im Zustand $|\,\text{☺}\rangle$ befinden, während einer toten Katze der Zustand $|\,\text{☹}\rangle$ zugeordnet wird.

(vii) Finden Sie den Zustand des Systems Beobachter-Katze-Giftapparatur.

(viii) Vergleichen Sie diesen Zustand mit dem aus Teilaufgabe (iv). Besteht das vermeintliche Paradox weiterhin?

## Solution

(i) Thomas: "Obviously, a classical cat is either dead or alive."
If we are very naive about the description of the experiment, we could describe the quantum state of the atom as a superposition of excited and ground state, and conclude that the cat is thus also in a superposition of dead and alive state. However, classically, there are no such superpositions of states, hence there is an ambiguity. Since we cannot describe the decay of the nucleus classically, we cannot conclude that before opening the box, the cat is both alive and dead, since this is not an allowed state.

(ii) Neglecting details of the nucleus and the precise specifications of the setup, we can describe the situation as a superposition of the states $|\,f\rangle$ and $|\,\bar{f}\rangle$ given by

$$|\,\psi\rangle = \sqrt{p}\,|\,f\rangle + \sqrt{(1-p)}\,|\,\bar{f}\rangle\,.$$

We conclude that the state $|\,f\rangle$ is found with a probability of $p$, since the nucleus decays with a probability of $p$.

(iii) Thomas: “In a purely classical description, the cat would be either alive or dead. The atom - assuming that it could be described in a classical framework - would decay at a certain point, independent of the interaction with the cat. In the model we consider, the cat as a classical observer would still be either alive or dead. In particular, it would not be in a superposition of both. However, the atom would remain in a superposition state, only decaying due to the interaction with the cat.”

(iv) We describe this state as an entangled product state given by

$$|\,\psi\rangle = \sqrt{p}\,|\,f\rangle \otimes \big|\,\text{😿}\big\rangle + \sqrt{1-p}\,\big|\,\bar{f}\big\rangle \otimes \big|\,\text{🐱}\big\rangle\,.$$

Again, we find the dead cat with a probability of $p$ and the living one with $1-p$.

(v) Thomas: “Classically, we would expect the cat to be either dead or alive, even before the measurement in the form of opening the box. The main insights the students should get while thinking about this task is that the concept of superposition has no classical analogy.”
This description seems paradox, since we take the superposition of macroscopic objects, which is extremely delicate and prone to decoherence. It seems very strange to consider exact superpositions of such macroscopic objects (the cat would consist of roughly $10^{27}$ electrons).
Also, we have to be very careful about what we are saying with this state. In analogy to the Stern-Gerlach Experiment (or EPR above), we cannot conclude that this superposition represents a cat that is both alive and dead at the same time, just as we cannot say that a particle in the $|\,+_x\rangle$-state has both spin up and down in $z$ at the same time. The corresponding observables are incompatible, hence we must be thoughtful about the interpretation. We should ask first, how we would define the cat as a quantum system, and then if our description in terms of complete set of compatible observables can somehow incorporate live and dead (which is unlikely). If this is not the case, then this interpretation of the superposition is meaningless.

(vi) The state of the cat is in a superposition of alive and dead.

(vii) We would describe the system by the state

$$|\,\psi\rangle = \sqrt{p}\,|\,f\rangle \otimes \big|\,\text{😿}\big\rangle \otimes |\,\text{☹}\rangle + \sqrt{1-p}\,\big|\,\bar{f}\big\rangle \otimes \big|\,\text{🐱}\big\rangle \otimes |\,\text{☺}\rangle\,.$$

(viii) The difference to (iv) is now in the observer being assigned a state. After measurement, each observer will only observe the corresponding cat and there is no ambiguity of the cat living or being dead, at the cost of allowing the observer-state to split into different branches.
Addition Thomas: “However, also the observer (i.e. you!) is in a superposition, which should seem strange. The solution to this depends on the interpretation you wish to follow.”