Prof. Dr. Stefan Hofmann Wintersemester 2018/19

Übungen zur Quantenmechanik (T2)

Übungsblatt 9, Besprechung vom 13.12 – 17.12

Aufgabe 1 – Kurzfragen

(i) Wir definieren den Operator $\Delta A = A - \langle A \rangle$, wobei $\langle A \rangle := \langle \psi \,|\, A \,|\, \psi \rangle$ den Erwartungswert der Observable A bezüglich eines beliebigen Zustands $|\,\psi\rangle$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass für die Varianz $\langle (\Delta A)^2 \rangle$ folgende Relationen gelten

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2,$$
$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \geq 0.$$

(ii) Ist die Varianz einer Observablen eine beobachtbare Größe?

(iii) Zeigen Sie, dass die Poisson-Klammer sowohl bilinear als auch antisymmetrisch ist und die Jacobi-Identität erfüllt. Berechnen Sie $\{x, p^2\}$.

(iv) Berechnen Sie für die Operatoren A, B und C die folgenden Kommutatoren

$$[A, B + C], \qquad [AB, C], \qquad [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]].$$

(v) Zeigen Sie für die Operatoren A und B

$$e^A B e^{-A} = \sum_n \frac{1}{n!} [A, B]_n$$

mit $[A, B]_0 = B$ und $[A, B]_n = [A, [A, B]_{n-1}]$.

Aufgabe 2 – Hamel- und Schauderbasis

In der folgenden Aufgabe wollen wir uns mit verschiedenen Basisdefinitionen auf topologischen Vektorräumen auseinandersetzen. Die aus der linearen Algebra bekannte Basis ist eine sogenannte Hamelbasis. Wir werden sehen, dass es auf unendlich-dimensionalen topologischen Vektorräumen, wie beispielsweise Hilberträumen, eine sinnvollere Basisdefinition gibt, die die Topologie entscheidend benutzt.
Im folgenden sei $\mathscr{H}$ ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum.
Zuerst überzeugen wir uns, dass das innere Produkt des Hilbertraums auf natürliche Weise eine Topologie induziert, die sogenannte *Normtopologie*.

(i) Zeigen Sie, dass durch $\|\psi\| := \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}$ eine Norm auf $\mathscr{H}$ definiert wird.

Wir definieren nun die *Normtopologie* durch explizites angeben der offenen Mengen. Eine Menge $U \subset \mathscr{H}$ heißt offen, falls

$$\forall \psi \in U \exists \varepsilon > 0 \colon B_\varepsilon(\psi) \subset U,$$

wobei

$$B_\varepsilon(\psi) := \{\phi \in \mathscr{H} \colon \|\phi - \psi\| < \varepsilon\}.$$

Die Normtopologie ist dann die Menge aller offenen Mengen, $\mathcal{T} = \{U \subset \mathscr{H} \colon U \text{ offen}\}$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathscr{H}$ definiert.

(iii) Zeigen Sie, dass ein normierter Vektorraum ein topologischer Vektorraum ist, d.h. dass $+$ und $\cdot$ stetige Abbildungen sind. Sie könne hierfür verwenden, dass die Produkttopologie von

$$\|(\psi,\phi)\|_{\mathscr{H}\times\mathscr{H}} = \|\psi\|_{\mathscr{H}} + \|\phi\|_{\mathscr{H}},$$
$$\|(\alpha,\psi)\|_{\mathbb{C}\times\mathscr{H}} = |\alpha| + \|\psi\|_{\mathscr{H}}$$

induziert wird. Machen Sie sich klar, dass Sie den aus der reellen Analysis bekannten Stetigkeitsbegriff (ε-δ bzw. Lipschitz-Stetigkeit) auf diese Topologie verallgemeinern können, in dem Sie die Norm $\|\cdot\|$ statt des euklidischen Betrags $|\cdot|$ verwenden.

Nun widmen wir uns der Basis eines unendlich-dimensionalen Vektorraumes. Eine Hamelbasis ist eine *linear unabhängige* Teilmenge $B \subset \mathscr{H}$, so dass jeder Vektor $v \in \mathscr{H}$ eine *eindeutige, endliche* Linearkombination von Elementen aus B besitzt, d.h.

$$\forall v \in \mathscr{H} \exists n \in \mathbb{N}\colon \{e_1,\dots,e_n\} \in B, \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{C}\colon v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Das Problem dieser Basisdefinition liegt in der Forderung nach einer endlichen Linearkombination. Auf unendlich-dimensionalen Vektorräumen bekommen wir dadurch stets eine überabzählbare Basis, welche im Allgemeinen nicht angegeben werden kann. Wir können die Existenz dieser Basis zeigen, diese allerdings nicht konstruieren. Das macht sie für unsere Anwendungen sehr ungeeignet.

(iv) Zeigen Sie, dass eine Hamelbasis eines unendlich-dimensionalen Hilbertraumes überabzählbar ist.
Eine mögliche Strategie ist wie folgt:
Nehmen Sie an, dass eine abzählbare Basis $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existiert. Zerlegen Sie den Vektorraum in endlich-dimensionale Teilräume $\mathscr{H}_n = \operatorname{span}\{v_1,\dots,v_n\}$, so dass $\mathscr{H} = \cup_{n=1}^{\infty}\mathscr{H}_n$. Zeigen Sie, dass diese Unterräume abgeschlossen bzgl. der Normtopologie sind. Zeigen Sie dann, dass die Menge der inneren Punkte von $\mathscr{H}_n$ leer ist, d.h. $\mathscr{H}_n$ sind nirgends dicht. Dies ist im Widerspruch zum Satz von Baire, welcher besagt, dass ein nicht-leerer metrischer Raum nicht die abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen ist.

Da das innere Produkt auf Hilberträumen eine Topologie induziert, können wir einen Konvergenzbegriff definieren. Diese Konvergenz erlaubt es uns, solange wir auf die Darstellung durch endliche Linearkombinationen verzichten, eine abzählbare Basis zu definieren, welche wir auch konstruieren können. Diese Basis nennen wir Schauderbasis.
Eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Schauderbasis*, falls jedes Element $v \in \mathscr{H}$ eindeutig als konvergente Reihe (bezüglich der induzierten Norm) dargestellt werden kann, d.h.

$$\forall v \in \mathscr{H}\ \exists!(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}\colon v = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_i b_i,$$

in anderen Worten

$$\lim_{n\to\infty} \|v - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\| = 0.$$

Ein Hilbertraum, der eine Schauderbasis besitzt, heißt *separabel*.
Machen Sie sich insbesondere klar, dass beide Basisbegriffe auf endlich-dimensionalen Vektorräumen übereinstimmen.
Ein bekanntes Beispiel einer Schauderbasis sind die Basisfunktionen der diskreten Fouriertransformation von periodischen Funktionen auf Intervallen, definiert auf dem Hilbertraum $L^2([0,\pi])$. Ebenfalls ist die Eigenbasis eines selbst-adjungierten Operators (bei rein diskretem Spektrum) eine Schauderbasis.

Aufgabe 3 – Infinitesimale Erzeuger

Im Folgenden wollen wir das Konzept der infinitesimalen Erzeuger anhand eines konkreten Beispiels verdeutlichen. Hierzu wollen wir die Gruppe der Rotationen des dreidimensionalen euklidischen Raums $\mathbb{R}^3$ betrachten.

(i) Argumentieren Sie zunächst, warum sich Rotationen durch orthogonale Matrizen mit Determinante 1 darstellen lassen. Diese Matrizen bilden die Gruppe $SO(3)$.

(ii) Wie viele unabhängige Elemente hat eine solche Matrix?

(iii) Bestimmen Sie explizit die Matrixdarstellungen der Rotationen $R_a(\phi)$ um die x-,y- und z-Achsen, mit $a \in \{x, y, z\}$, als Funktion des Rotationswinkels ϕ. Überprüfen Sie, dass diese Matrizen tatsächlich die Anforderungen aus Teilaufgabe (i) erfüllen.

(iv) Bestimmen Sie die infintesimalen Erzeuger T_a, $a \in \{x, y, z\}$ dieser Rotationen. Vergewissern Sie sich, dass die Matrizen iT_a hermitesch sind.

(v) Zeigen Sie, dass $\exp(\phi T_a) = R_a(\phi)$ gilt.

(vi) Berechnen Sie nun $\exp(\omega^a T_a)$ (mit impliziter Summe über den Index a). Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

(vii) Berechnen Sie die Kommutatoren der infinitesimalen Erzeuger, $[T_a, T_b]$. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Poisson-Klammern des Drehimpulses, $\{L_a, L_b\}$.