Prof. Dr. Stefan Hofmann Wintersemester 2018/19

Übungen zur Quantenmechanik (T2)

Übungsblatt 9, Besprechung vom 13.12 – 17.12

Aufgabe 1 – Kurzfragen

(i) Wir definieren den Operator $\Delta A = A - \langle A \rangle$, wobei $\langle A \rangle := \langle \psi \,|\, A \,|\, \psi \rangle$ den Erwartungswert der Observable A bezüglich eines beliebigen Zustands $|\,\psi\rangle$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass für die Varianz $\langle (\Delta A)^2 \rangle$ folgende Relationen gelten

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2,$$
$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \geq 0.$$

(ii) Ist die Varianz einer Observablen eine beobachtbare Größe?

(iii) Zeigen Sie, dass die Poisson-Klammer sowohl bilinear als auch antisymmetrisch ist und die Jacobi-Identität erfüllt. Berechnen Sie $\{x, p^2\}$.

(iv) Berechnen Sie für die Operatoren A, B und C die folgenden Kommutatoren

$$[A, B + C], \qquad [AB, C], \qquad [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]].$$

(v) Zeigen Sie für die Operatoren A und B

$$e^A B e^{-A} = \sum_n \frac{1}{n!} [A, B]_n$$

mit $[A, B]_0 = B$ und $[A, B]_n = [A, [A, B]_{n-1}]$.

Solution

(i) We compute explicitly

$$\begin{aligned} \langle (\Delta A)^2 \rangle &= \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \\ &= \langle A^2 - 2\langle A \rangle A + \langle A \rangle^2 \rangle \\ &= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2, \end{aligned}$$

where we used that $\langle A \rangle$ is a number, so it commutes with A and $\langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle$.

For the second relation, note that for an observable, $(\Delta A)^2 = (\Delta A)^\dagger (\Delta A)$, so we can write

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle (\Delta A)^\dagger (\Delta A) \rangle = \|\Delta A \psi\|^2 \geq 0,$$

where we also used that for observables, $\langle A \rangle$ is real. This can be seen from the fact that expectation values are basis-independent

$$\langle \psi \,|\, A \,|\, \psi \rangle = \sum_{n,m} \langle \psi \,|\, \phi_n \rangle \langle \phi_n \,|\, A \,|\, \phi_m \rangle \langle \phi_m \,|\, \psi \rangle \,,$$

and choosing the eigenbasis of A yields

$$\langle \psi \,|\, A \,|\, \psi \rangle = \sum_n a_n \, |c_n|^2 \,,$$

with real eigenvalues a_n. Note that for a generic operator, i.e. non-Hermitian, these identities do not hold with this definition. We can, however, define the variance for a generic operator as

$$\langle (\Delta B)^2 \rangle = \langle B^\dagger B \rangle - \langle B^\dagger \rangle \langle B \rangle,$$

and all results hold.

(ii) The variance gives us a measure of the deviation of the measured results of A from the expectation value $\langle A \rangle$. It is a real number, but in general quite different from the actual measurements (unless we compute the variance for an eigenstate, of course). It gives us an inherently statistical statement about the prepared states if we were to perform the same measurement many times on copies of the same quantum system.

(iii) The Poisson bracket is defined as

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_a} \frac{\partial g}{\partial q^a} - \frac{\partial f}{\partial q^a} \frac{\partial g}{\partial p_a}.$$

We immediately see that it is antisymmetric, and by linearity of ∂_a we also conclude bilinearity. The Jacobi identity states

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

One can show the Jacobi identity by explicit and straightforward (although really tedious) computation. An alternative derivation can be found by considering an infinitesimal canonical transformation generated by the function h. A phase-space function transforms as $\delta f = \{f, h\}$. Applying this to the Poisson bracket, we find

$$\delta\{f, g\} = \{\{f, g\}, h\}.$$

We can also compute this variation directly

$$\delta\{f, g\} = \{\delta f, g\} + \{f, \delta g\} = \{\{f, h\}, g\} + \{f, \{g, h\}\}.$$

Subtracting both terms and using the antisymmetry of the Poisson bracket, we finally obtain

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0.$$

For the second part, we compute

$$\{x, p^2\} = 2p\{x, p\} = -2p.$$

(iv) We compute

$$\begin{aligned}
[A, B + C] &= A(B + C) - (B + C)A = [A, B] + [A, C], \\
[AB, C] &= ABC - CAB = ABC - ACB + ACB - CAB = A[B, C] + [A, C]B.
\end{aligned}$$

The last identity is the Jacobi identity for the commutator

$$\begin{aligned}
[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] &= A[B, C] - [B, C]A + B[C, A] - [C, A]B + C[A, B] - [A, B]C \\
&= [AB, C] + [BC, A] + [CA, B] \\
&= ABC - CAB + BCA - ABC + CAB - BCA = 0.
\end{aligned}$$

(v) To show this identity, we promote the expression to a function of a parameter α, defined by

$$F(\alpha) = e^{\alpha A} B e^{-\alpha A}.$$

The required identity should then follow from $F(\alpha = 1)$. Taking the derivative with respect to α, we find

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} F(\alpha) = AF(\alpha) - F(\alpha)A = [A, F(\alpha)].$$

Next, we consider the Taylor series of F, given by

$$F(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F_n \alpha^n,$$

and compute the derivative

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} F(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} F_n \alpha^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F_{n+1} \alpha^n.$$

Using the result from above, we find

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F_{n+1} \alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [A, F_n] \alpha^n,$$

so by comparing the coefficients, we find the recursion relation

$$F_{n+1} = [A, F_n].$$

We see that in 0-th order, we have $F_0 = B$, and so the result follows,

$$F(1) = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [A, B]_n.$$

Aufgabe 2 – Hamel- und Schauderbasis

In der folgenden Aufgabe wollen wir uns mit verschiedenen Basisdefinitionen auf topologischen Vektorräumen auseinandersetzen. Die aus der linearen Algebra bekannte Basis ist eine sogenannte Hamelbasis. Wir werden sehen, dass es auf unendlich-dimensionalen topologischen Vektorräumen, wie beispielsweise Hilberträumen, eine sinnvollere Basisdefinition gibt, die die Topologie entscheidend benutzt.
Im folgenden sei $\mathscr{H}$ ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum.
Zuerst überzeugen wir uns, dass das innere Produkt des Hilbertraums auf natürliche Weise eine Topologie induziert, die sogenannte *Normtopologie*.

(i) Zeigen Sie, dass durch $\|\psi\| := \sqrt{\langle\psi, \psi\rangle}$ eine Norm auf $\mathscr{H}$ definiert wird.

Wir definieren nun die *Normtopologie* durch explizites angeben der offenen Mengen. Eine Menge $U \subset \mathscr{H}$ heißt offen, falls

$$\forall \psi \in U \exists \varepsilon > 0 \colon B_\varepsilon(\psi) \subset U,$$

wobei

$$B_\varepsilon(\psi) := \{\phi \in \mathscr{H} \colon \|\phi - \psi\| < \varepsilon\}.$$

Die Normtopologie ist dann die Menge aller offenen Mengen, $\mathcal{T} = \{U \subset \mathscr{H} : U \text{ offen}\}$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathscr{H}$ definiert.

(iii) Zeigen Sie, dass ein normierter Vektorraum ein topologischer Vektorraum ist, d.h. dass $+$ und $\cdot$ stetige Abbildungen sind. Sie könne hierfür verwenden, dass die Produkttopologie von

$$\|(\psi, \phi)\|_{\mathscr{H} \times \mathscr{H}} = \|\psi\|_{\mathscr{H}} + \|\phi\|_{\mathscr{H}},$$
$$\|(\alpha, \psi)\|_{\mathbb{C} \times \mathscr{H}} = |\alpha| + \|\psi\|_{\mathscr{H}}$$

induziert wird. Machen Sie sich klar, dass Sie den aus der reellen Analysis bekannten Stetigkeitsbegriff (ε-δ bzw. Lipschitz-Stetigkeit) auf diese Topologie verallgemeinern können, in dem Sie die Norm $\|\cdot\|$ statt des euklidischen Betrags $|\cdot|$ verwenden.

Nun widmen wir uns der Basis eines unendlich-dimensionalen Vektorraumes. Eine Hamelbasis ist eine *linear unabhängige* Teilmenge $B \subset \mathscr{H}$, so dass jeder Vektor $v \in \mathscr{H}$ eine *eindeutige, endliche* Linearkombination von Elementen aus B besitzt, d.h.

$$\forall v \in \mathscr{H} \exists n \in \mathbb{N} \colon \{e_1, \ldots, e_n\} \in B, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C} \colon v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Das Problem dieser Basisdefinition liegt in der Forderung nach einer endlichen Linearkombination. Auf unendlich-dimensionalen Vektorräumen bekommen wir dadurch stets eine überabzählbare Basis, welche im Allgemeinen nicht angegeben werden kann. Wir können die Existenz dieser Basis zeigen, diese allerdings nicht konstruieren. Das macht sie für unsere Anwendungen sehr ungeeignet.

(iv) Zeigen Sie, dass eine Hamelbasis eines unendlich-dimensionalen Hilbertraumes überabzählbar ist. Eine mögliche Strategie ist wie folgt:
Nehmen Sie an, dass eine abzählbare Basis $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existiert. Zerlegen Sie den Vektorraum in endlich-dimensionale Teilräume $\mathscr{H}_n = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$, so dass $\mathscr{H} = \cup_{n=1}^{\infty}\mathscr{H}_n$. Zeigen Sie, dass diese Unterräume abgeschlossen bzgl. der Normtopologie sind. Zeigen Sie dann, dass die Menge der inneren Punkte von $\mathscr{H}_n$ leer ist, d.h. $\mathscr{H}_n$ sind nirgends dicht. Dies ist im Widerspruch zum Satz von Baire, welcher besagt, dass ein nicht-leerer metrischer Raum nicht die abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen ist.

Da das innere Produkt auf Hilberträumen eine Topologie induziert, können wir einen Konvergenzbegriff definieren. Diese Konvergenz erlaubt es uns, solange wir auf die Darstellung durch endliche Linearkombinationen verzichten, eine abzählbare Basis zu definieren, welche wir auch konstruieren können. Diese Basis nennen wir Schauderbasis.
Eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Schauderbasis*, falls jedes Element $v \in \mathscr{H}$ eindeutig als konvergente Reihe (bezüglich der induzierten Norm) dargestellt werden kann, d.h.

$$\forall v \in \mathscr{H}\ \exists!(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}\colon v = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_i b_i,$$

in anderen Worten

$$\lim_{n\to\infty} \|v - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\| = 0.$$

Ein Hilbertraum, der eine Schauderbasis besitzt, heißt *separabel*.
Machen Sie sich insbesondere klar, dass beide Basisbegriffe auf endlich-dimensionalen Vektorräumen übereinstimmen.
Ein bekanntes Beispiel einer Schauderbasis sind die Basisfunktionen der diskreten Fouriertransformation von periodischen Funktionen auf Intervallen, definiert auf dem Hilbertraum $L^2([0,\pi])$. Ebenfalls ist die Eigenbasis eines selbst-adjungierten Operators (bei rein diskretem Spektrum) eine Schauderbasis.

Solution

(i) A norm is a positive-definite map that is absolutely homogeneous and satisfies a triangle inequality.

Positive-definiteness This follows immediately from the positive-definiteness of the inner product.

Absolute homogeneity Observe that

$$\|\alpha\psi\| = \sqrt{\langle\alpha\psi, \alpha\psi\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle\psi, \psi\rangle} = |\alpha|\, \|\psi\|.$$

Triangle inequality To show this, we need the Cauchy-Schwarz inequality (should be known from M2)

$$|\langle\psi, \phi\rangle| \leq \|\psi\|\|\phi\|.$$

We then compute

$$\begin{aligned}
\|\psi + \phi\|^2 &= \langle\psi + \phi, \psi + \phi\rangle \\
&= \langle\psi, \psi\rangle + \langle\phi, \phi\rangle + \langle\psi, \phi\rangle + \langle\phi, \psi\rangle \\
&= \|\psi\|^2 + \|\phi\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle\psi, \phi\rangle) \\
&\leq \|\psi\|^2 + \|\phi\|^2 + 2\,|\langle\psi, \phi\rangle| \\
&\leq \|\psi\|^2 + \|\phi\|^2 + 2\|\psi\|\|\phi\| = (\|\psi\| + \|\phi\|)^2.
\end{aligned}$$

We conclude that $\|\psi + \phi\| \leq \|\psi\| + \|\phi\|$.

(ii) For $\mathcal{T}$ to be a topology, it must include the empty set $\emptyset$ and the full space $\mathscr{H}$, it must be stable under finite intersections and arbitrary unions.

Empty Set and $\mathscr{H}$ Clearly, the empty set and $\mathscr{H}$ are in $\mathcal{T}$

Finite Intersections Consider $U_1, \dots U_n \in \mathcal{T}$ with $x \in \cap_i U_i$. Then $x \in U_i$ for each i and there exists some ε_i such that $B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_i$. Take the smallest such ε, given by $\varepsilon := \min_i \varepsilon_i$, then

$$B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_i$$

for all i. We conclude that $B_\varepsilon(x) \subseteq \cap_i U_i$ hence the intersection is open.

Unions Consider U_i for some index $i \in I$ and $x \in \cup_i U_i$. Then one set U_j contains x, and since the U_i are open, there exists a $\varepsilon > 0$ and a ball $U_\varepsilon(x) \subseteq U_j \subseteq \cup_i U_i$, so the union is open.

(iii) Continuity of $+$ and $\cdot$ follows directly from the triangle inequality.

+ Denote $u + v = f(u, v)$. We then have to show that $f\colon \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ is continuous. We compute

$$\|f(x, y) - f(u, v)\| = \|x + y - u + v\| \leq \|x - u\| + \|y - v\| = \|(x, y) - (u, v)\|,$$

so the function f is Lipschitz-continuous with $L = 1$, so in particular continuous.

· Consider $\lambda \cdot u = g(\lambda, u)$. Let $\varepsilon > 0$. For continuity in λ, u, we have to find a $\delta > 0$ such that

$$\|(\lambda, u) - (\mu, v)\| < \delta \Rightarrow \|g(\lambda, u) - g(\mu, v)\| < \varepsilon.$$

Consider the case $\|u - v\| < 1$. Then

$$\|v\| = \|v - u + u\| \leq \|v - u\| + \|u\| \leq \|u\| + 1.$$

We can also compute

$$\begin{aligned}
\|g(\lambda, u) - g(\mu, v)\| &= \|\lambda u - \mu v\| \\
&= \|\lambda u - \lambda v + \lambda v - \mu v\| \\
&\leq |\lambda|\,\|u - v\| + |\lambda - \mu|\,\|v\| \\
&\leq (|\lambda| + 1)\|u - v\| + (|\lambda - \mu|)(\|u\| + 1) \\
&\leq \max\{\|u\| + 1, |\lambda| + 1\}\,(|\lambda - \mu| + \|u - v\|)
\end{aligned}$$

If $\|(\lambda, u) - (\mu, v)\| = |\lambda - \mu| + \|u - v\| < \delta$ with

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2\max\{|\lambda| + 1, \|u\| + 1\}}\right\}$$

then in particular $\|v\| \leq \delta + \|u\| \leq 1 + \|u\|$ and $\|g(\lambda, u) - g(\mu, v)\| < \varepsilon$.

(iv) This proof is quite abstract and topology-heavy, so the students are not expected to solve this without problems. The main idea to take home from this exercise is that the Hamelbasis is uncountable, and thus the Schauderbasis is quite useful. We follow the strategy and show this by contradiction.
Suppose there exists a countable basis $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of $\mathscr{H}$. Then we can define the subspaces

$$\mathscr{H}_n := \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}.$$

Decompose $\mathscr{H}$ We can decompose $\mathscr{H}$ as $\mathscr{H} = \cup_{n=1}^\infty \mathscr{H}_n$.

$\mathscr{H}_n$ are closed Since $\mathscr{H}_n$ is a finite-dimensional subspace and it inherits a norm from $\mathscr{H}$, it is a Banach space (finite-dimensional normed spaces are complete), hence all Cauchy sequences in $\mathscr{H}_n$ converge in $\mathscr{H}_n$ with unique limits, so it is also closed.

$\mathscr{H}_n$ are nowhere dense The $\mathscr{H}_n$ are proper subsets of $\mathscr{H}$. Hence they have empty interior. This can be seen by contradiction.
Suppose $\mathscr{H}_n$ has non-empty interior. Then there exists some open Ball $B_\varepsilon(u)$ that is contained in $\mathscr{H}$. However, for any $v \in \mathscr{H}$, we also have $w = u + \frac{\varepsilon}{2\|v\|} v \in B_\varepsilon(u) \subset \mathscr{H}_n$. Since it is a subspace, it is closed under vector addition and scalar multiplication, so also $v = \frac{2\|z\|}{\varepsilon}(w - u) \in \mathscr{H}_n$. We conclude that $\mathscr{H}_n = \mathscr{H}$ in contradiction to it being a proper subset. Since $\mathscr{H}_n$ is closed, it is equal to its closure, and so its closure has empty interior, and thus it is nowhere dense.

Apply Baire By Baire's theorem, a non-empty complete metric space cannot be the countable union of nowhere dense sets, hence we have a contradiction. (Alternatively, we would need one of the $\mathscr{H}_n$ to contain an open ball, forcing $\mathscr{H}$ to be finite-dimensional). So the Hamel basis of a Hilbert space is uncountable.

Aufgabe 3 – Infinitesimale Erzeuger

Im Folgenden wollen wir das Konzept der infinitesimalen Erzeuger anhand eines konkreten Beispiels verdeutlichen. Hierzu wollen wir die Gruppe der Rotationen des dreidimensionalen euklidischen Raums $\mathbb{R}^3$ betrachten.

(i) Argumentieren Sie zunächst, warum sich Rotationen durch orthogonale Matrizen mit Determinante 1 darstellen lassen. Diese Matrizen bilden die Gruppe $SO(3)$.

(ii) Wie viele unabhängige Elemente hat eine solche Matrix?

(iii) Bestimmen Sie explizit die Matrixdarstellungen der Rotationen $R_a(\phi)$ um die x-,y- und z-Achsen, mit $a \in \{x, y, z\}$, als Funktion des Rotationswinkels ϕ. Überprüfen Sie, dass diese Matrizen tatsächlich die Anforderungen aus Teilaufgabe (i) erfüllen.

(iv) Bestimmen Sie die infintesimalen Erzeuger T_a, $a \in \{x, y, z\}$ dieser Rotationen. Vergewissern Sie sich, dass die Matrizen iT_a hermitesch sind.

(v) Zeigen Sie, dass $\exp(\phi T_a) = R_a(\phi)$ gilt.

(vi) Berechnen Sie nun $\exp(\omega^a T_a)$ (mit impliziter Summe über den Index a). Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

(vii) Berechnen Sie die Kommutatoren der infinitesimalen Erzeuger, $[T_a, T_b]$. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Poisson-Klammern des Drehimpulses, $\{L_a, L_b\}$.

Solution

(i) Rotations are linear transformations that preserve the Euclidean norm, hence they must be part of O(3). An orthogonal matrix has determinant ± 1, as can be seen from

$$1 = \det(O^{-1}O) = \det(O^T O) = \det(O)^2.$$

Since we want the rotations to be connected to the identity transformation continuously, we require $\det O = +1$. The left-out transformations correspond to reflections of axes.

(ii) A generic 3×3 matrix has 9 independent components. Let us parametrise the matrix as

$$O = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Orthogonality then requires

$$\begin{aligned} 1 &= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 & \qquad 0 &= a_{11}a_{21} + a_{12}a22a_{13}a_{23}, \\ 1 &= a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 & 0 &= a_{11}a_{31} + a_{12}a32a_{13}a_{33}, \\ 1 &= a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 & 0 &= a_{21}a_{31} + a_{22}a32a_{23}a_{33}, \end{aligned}$$

i.e. the column vectors should form an orthonormal system. We thus end up with $9-6=3$ independent components. Unlike in the unitary case, demanding $\det O = 1$ does not kill any components.

(iii) The rotation matrices are given by

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \quad R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}, \quad R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

and a quick computation shows that they are indeed orthogonal.

(iv) The infinitesimal generators are defined by

$$\lim_{\phi\to 0} \frac{1}{\phi}\left(R(\phi) - \mathrm{Id}\right) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\right|_{\phi=0} R(\phi).$$

We obtain for the three generators

$$T_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

The matrices are skew-symmetric, so iT are indeed Hermitian matrices.

(v) First, note that $T_a^2 = \delta_{ai}\delta_{aj} - \delta_{ij}$, e.g.

$$T_3^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

All powers of T_a higher than 0 thus reduce to the 2×2-blocks. We find

$$\exp(\phi T_x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\phi T_x)^k = \mathrm{Id} + \sum_{k=1} \frac{1}{(2k)!}\phi^{2k}(-1)^k (T_x)^2 + \sum_{k=0} \frac{1}{(2k+1)!}\alpha^{2k+1}(-1)^k T_x = \mathrm{Id} + (1-\cos\phi)T_x^2 + \sin\phi T_x.$$

Summing this, we find $\exp(\phi T_x) = R_x(\phi)$. The analogous computation gives the results for T_y, T_z.

(vi) We split the exponential series the same way we did for the individual T_a. We write $w^a = \phi n^a$ with a unit vector n, and compute even and odd powers of $A := n^a T_a = \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}$. We find

$$(n^a T_a)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} n_x^2 - 1 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_x n_y & n_y^2 - 1 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & n_z^2 - 1 \end{pmatrix} =: B - \mathrm{Id}.$$

Note that $BA = 0$ For the odd powers, we thus find $A^3 = (B - \mathrm{Id})A = -A$. Computing the exponential, we find

$$\exp(w^a T_a) = \mathrm{Id} + \sin\theta A + (1 - \cos\theta)(A)^2 = B + \cos\theta(\mathrm{Id} - B) + \sin\theta A,$$

also known as the Rodrigues' rotation formula.

(vii) From the matrix form, we see that $(T_a)_{ij} = -\varepsilon_{ija}$. We can compute the commutator as

$$\begin{aligned}
[T_a, T_b] &= \varepsilon_{ika}\varepsilon_{kjb} - \varepsilon_{ikb}\varepsilon_{kja} \\
&= -\delta_{ij}\delta_{ab} + \delta_{ib}\delta ja + \delta_{ij}\delta ab - \delta_{ia}\delta_{jb} \\
&= \delta_{ib}\delta_{ja} - \delta_{ia}\delta_{jb} \\
&= -\varepsilon_{cij}\varepsilon_{cab} \\
&= \varepsilon_{abc}(T_c)_{ij}.
\end{aligned}$$

This is precisely the angular momentum algebra from the Poisson bracket. If we used instead the Hermitian generators iT_a, we would find the algebra

$$[iT_a, iT_b] = i\varepsilon_{abc}(iT_c),$$

which is the algebra of the spin matrices.