Thermodynamik 5

Das 5. Übungsblatt wird in der Zentralübung am Dienstag den 15. Mai von 12 -14 Uhr im großen Physikhörsaal besprochen.
Aufgaben, die für E2p Studierende optional sind, sind mit einem "*" markiert.

Teil A: Verständnisaufgaben

Aufgabe 1 – Carnot-Wirkungsgrad

Erklären Sie kurz, warum der Carnot-Wirkungsgrad der maximal mögliche Wirkungsgrad für eine Wärmeekraftmaschine ist. Hinweis: Hierfür lohnt es sich ein S-T-Diagramm für einen Carnotprozess zu zeichnen.

Aufgabe 2 – Wirkungsgrad und Leistungszahl*

Erklären Sie kurz den Unterschied zwischen Wirkungsgrad und Leistungszahl. Warum gibt man bei einem Dieselmotor den Wirkungsgrad und bei einer Wärmepumpe die Leistungszahl an?

Aufgabe 3 – Joule-Thomson-Effekt*

Erklären Sie kurz, worum es sich beim sogenannten Joule – Thomson – Effekt handelt. Was kann man unter Ausnutzung des Joule – Thomson – Effekts mit Hilfe eines Drosselventils machen? Wie funktioniert das?

Aufgabe 4 – 3. Hauptsatz*

Beschreiben Sie in einem Satz die Aussage des dritten Hauptsatzes der Thermodynamik.

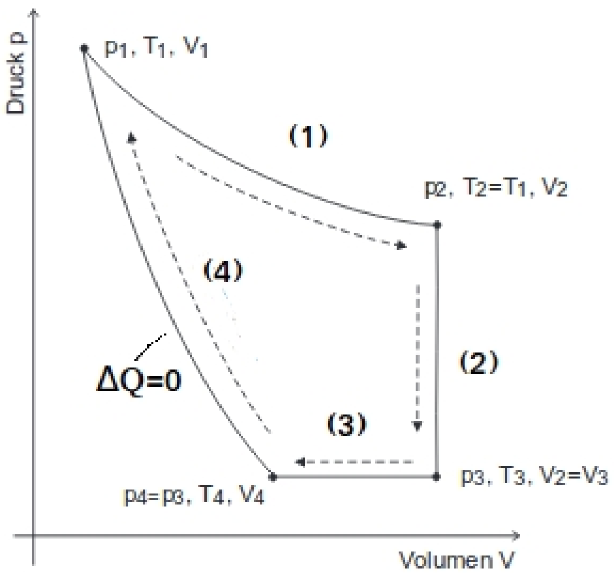
Aufgabe 5 – Wärmetransport*

Erklären Sie kurz, wie die drei Wärmetransportmechanismen **Wärmeleitung**, **Konvektion** und **Wärmestrahlung** funktionieren. Wie wird die Wärme transportiert? Was sind die Trägerteilchen? Gibt es ein einfaches Gesetz, dass die Leistung des jeweiligen Wärmetransportes in Abhängigkeit von der Temperatur angibt?

Teil B: Rechenaufgaben

Aufgabe 6 – Kreisprozess

Gegeben sei folgendes p-V-Diagramm eines Kreisprozesses an einem idealen Gas mit Adiabatenkoeffizient $\gamma > 1$:



(a) Benennen Sie alle 4 Prozessschritte (1) bis (4). (Hinweis: Der Kreisprozess enthält einen isothermen, einen isochoren, einen isobaren und einen adiabatischen Prozessschritt).

(b) Bestimmen Sie für jeden Prozessweg (1) bis (4) einzeln, die in ihm verrichtete Arbeit ΔW.

(c) Bestimmen Sie für jeden Prozessweg (1) bis (4) die Wärme, die zugeführt oder abgeführt werden muss.

(d) Bestimmen Sie für jeden Prozessweg (1) bis (4) einzeln die Entropieänderung auf dem Weg

(e) Bestimmen Sie die Gesamtentropieänderung, die der Kreisprozess bei einem Umlauf erzeugt, konkret für 2 mol eines einatomigen Gases mit den folgenden Messwerten:

p_1	100 bar	V_1	1 l
p_2	60 bar	V_2	5 l
p_3	20 bar	V_3	5 l
p_4	20 bar	V_4	3 l

Tabelle 1: Messwerte für Druck und Volumen im gezeigten Kreisprozess

Was folgt aus diesem Ergebnis für den Kreisprozess?

Aufgabe 7 – Boltzmann-Faktoren

Kaltes, intestellares Gas beinhlatet oft cyan-haltige Molekühlreste (CN). CN hat drei erste angeregte Rotations-Energiezustände mit der Energie $4.7 \cdot 10^{-4}$ eV (über dem Grundzustand). Spektroskopie-Vermessungen solcher Gaswolken in den 1940er-Jahren ergaben, dass für jeweils 10 Molekühle, die sich im Grundzustand befanden, jeweils im Mittel 3 Molekühle im ersten angeregten Zustand waren (das entspricht also einem angeregten Molekühl in jedem der drei angeregten Rotations-Energiezustände). Um dies zu erklären, schlugen die Astronomen vor, dass das Molekühlgas sich im thermischen Gleichgewicht mit einer klar definierten Temperatur befindet.

Nutzen Sie Boltzmannfaktoren ($e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$) um die Temperatur zu bestimmen, die zu dem beobachteten thermischen Gleichgewicht gehört.

Aufgabe 8 – Computer-Entropie

Eine weitere interessante Anwendung des Entropiebegriffs, bzw. der Größe Entropie findet sich in der Informationstheorie. In dieser Aufgabe wollen wir uns damit befassen, wie weit man den aus der Thermodynamik verwendeten Begriff der Entropie auf einen Computer übertragen kann.
Ein Bit eines Computerspeichers ist ein physikalisches Objekt, welches in zwei Zuständen sein kann und wird oft mit 0 oder 1 angegeben. Ein Byte sind acht Bits, ein Kilobyte sind $2^{10} = 1024$ Bytes, ein Megabyte 1024 Kilobytes und ein Gigabyte 1024 Megabytes.

(a) Nehmen Sie an, ein Computer löscht oder überschreibt ein Gigabyte Speicher und vernichtet jegliche Spuren zu der geänderten Information. Erklären Sie, warum dies eine bestimmte, minimale Entropie erzeugen muß und rechnen Sie sie diese aus.

Hinweis: Nehmen Sie dazu an, dass alle 1Gigabyte-Zustände zu einem makroskopisch ununterscheidbaren Zustand gehören. Anders gesagt: Aus einem Gigabyte Mikrozuständen wird ein einziger 1Gigabyte-Makrozustand. Nehmen Sie außerdem an, dass nach dem Löschen dieses Makrozustandes jeder Mikrozustand zufällig auf 1 oder 0 gesetzt sein könnte.

(b) Wenn diese Entropie in die Umwelt bei Raumtemperatur abgegeben wird, wieviel Wärme ist damit verbunden? Ist diese Wärmemenge signifikant?

Aufgabe 9 – Wärmeleitung durch ein Fenster*

Ein Fenster habe die Abmessungen $1,5$ m x $0,8$ m und eine Glasdicke $d_G = 4,5$ mm. Die Außentemperatur an der Glasscheibe sei $T_{außen} = 5$ °C und die im Raum sei $T_{innen} = 23$ °C. Die Wärmeleitfähigkeit von Glas beträgt $\lambda_{Glas} \approx 0,84$ J/(s K m).

(a) Berechnen Sie wie viel Joul Wärme pro Sekunde durch die Glasscheibe entweicht, wenn Sie lediglich Wärmeleitung durch die Glasscheibe betrachten. *Hinweis: Das Ergebnis wird unrealistisch groß sein.*

(b) In der Realität muss die Wärme aus dem Raum durch die Luftschichten an den Fensterscheiben geleitet werden. Der effektivste Mechanismus ist hierbei die Konvektion. Die Reibung am Glas behindert jedoch die Konvektion und man kann daher eine nahezu ruhende Luftschicht von etwa $d_{Luft} = 5$ *mm* an beiden Seiten des Glases annehmen. Die Wärmeleitfähigkeit von Luft ist $\lambda_{Luft} \approx 0,0262$ J/(s K m). Berechnen Sie erneut wie viel Joul Wärme pro Sekunde durch die Glasscheibe entweicht.

(c) Europäische Energieexperten empfehlen, Häuser nur auf $T_{innen} = 18$ °C zu heizen. Berechnen Sie wie viel Prozent Heizenergie eingespart werden können, wenn bei einer Außentemperatur von $T_{außen} = 5$ °C nur auf $T_{innen} = 18$ °C, anstatt $T_{innen} = 23$ °C geheizt wird.

Teil C: Bonusaufgaben

Diese Aufgaben müssen nicht bearbeitet werden. Sie werden aber im Falle einer Bearbeitung ebenfalls mit 1 oder 2 Punkten bewertet, die als Bonuspunkte gesammelt werden können.

Aufgabe 10 – kanonische Zustandssumme und freie Energie*

Gegeben sei die kanonische Zustandssumme $Z = \sum_i e^{-\beta \cdot E_i}$, dabei ist e die eulersche Zahl, $\beta = \frac{1}{k_B T}$ und E_i die Energie des i. ten Zustands. Zur Vereinfachung wollen wir in dieser Aufgabe davon ausgehen, dass es nur eine endliche Menge an $E_i$sind, also $i \in [1, 2, ..., M]\,,\ M \in \mathrm{N}$.

(a) Der Energieerwartungswert in einem System mit kanonischer Zustandssumme $Z = \sum_i e^{-\beta \cdot E_i}$ kann wie folgt berechnete werden:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{Z} \cdot \sum_i E_i \cdot e^{-\beta \cdot E_i}$$

Zeigen Sie, dass dies gleich dem folgenden Ausdruck ist:

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} ln\,(Z)$$

(b) Für die Entropie mit kanonischer Zustandssumme $Z = \sum_i e^{-\beta \cdot E_i}$ gilt

$$S = -\frac{k_B}{Z} \cdot \sum_i \left(e^{-\beta E_i} \cdot ln \left(\frac{e^{-\beta E_i}}{Z} \right) \right)$$

Zeigen Sie unter der Annahme, dass $U = \langle E \rangle$, mit Hilfe der Beziehung $F = U - T \cdot S$, dass für die Funktion F gilt:

$$F = k_B \cdot T \cdot ln\,(Z)$$

Tipp 1: $\beta = \frac{1}{k_B \cdot T}$
Tipp 2: Bringen Sie die Entropie S zunächst auf die Form $S = \frac{1}{T} \cdot \langle E \rangle + k_B \cdot ln\,(Z)$

Aufgabe 11 – Zustandssume des idealen Gases*

Diese Aufgabe führt uns vor, wie mächtig das Hilfsmittel der kanonischen Zustandssumme ist. Wir wollen nun alleine aus der Annahme, dass ein ideales Gas aus „freien Teilchen“ mit $E = \frac{p^2}{2m}$ besteht, die ideale Gasgleichung herleiten, die wir schon aus der ersten Vorlesung kennen. Diese Aufgabe führt vor, dass tatsächlich die Annahmen des idealen Gases, wei sie bereits auf Blatt 2 abgefragt und besprochen wurden, zur bekannten idealen Gasgleichung führen.

Für ein ideales Gas gilt, dass alle möglichen Energiezustände $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ möglich sind. Dadurch wird die Zustandssumme zu einem Integral, die Herleitung geht etwa so:

$$Z = \sum_{i \in I} e^{-\beta \cdot E_i} = \sum_{i \in I} e^{-\beta \cdot \frac{\vec{p}^2}{2m}}$$

Wir müssen an dieser Stelle berücksichtigen, dass die i-Indizes über die summiert wird, nicht nur alle möglichen Impulse, sondern auch alle möglichen Impulse aller N Teilchen berücksichtigt werden müssen. Folglich besteht die Indexmenge I aus N vielen Index-Untermengen in der die Indizes zu allen möglichen Impulse stehen. Daraus ergibt sich dann:

$$Z = \sum_{i \in I} e^{-\beta \cdot E_i} = \sum_{\vec{p} \in [P_1, P_2, ..., P_N]} e^{-\beta \cdot \frac{\vec{p}^2}{2m}} = \sum_{\vec{p} \in P_1} \cdot \sum_{\vec{p} \in P_2} \cdot \, ... \, \cdot \sum_{\vec{p} \in P_N} e^{-\beta \cdot \frac{\vec{p}^2}{2m}}$$

Da alle Teilchen gleich sind gilt dann:

$$Z = \sum_{\vec{p}\in P_1} \cdot \sum_{\vec{p}\in P_2} \cdot ... \cdot \sum_{\vec{p}\in P_N} e^{-\beta \cdot \frac{\vec{p}^2}{2m}} = \left(\sum_{\vec{p}\in P} e^{-\beta \cdot \frac{\vec{p}^2}{2m}} \right)^N$$

Da der Impuls jeweils 3 Raumrichungen hat, die ebenfalls alle isotrop sind, kann weiter vereinfacht werden:

$$Z = \left(\sum_{\vec{p}\in P} e^{-\beta \cdot \frac{\vec{p}^2}{2m}} \right)^N = \left(\sum_{p\in P_x} e^{-\beta \cdot \frac{p^2}{2m}} \right)^{3N}$$

Schlussendlich können wir die Summe als Phasenraumintegral auffassen, da wir ja über alle kontinuirlichen Impulse summieren (was einer Integration entspricht). Hierbei müssen wir jedoch den Phasenraum-Faktor $\left(\frac{V}{h^3}\right)^{1/3}$ verwenden. Diesen Phasenraumfaktor wurde zunächst experimentell gefunden, er kann allerdings erst mit quantenmechanischem Wissen erklärt werden. Im Grunde handelt es sich bei ihm um ein normiertes Phasenraumvolumen. Dadurch ergibt sich:

$$\sum_{p\in P_x} \approx \left(\frac{V}{h^3}\right)^{1/3} \int_{-\infty}^{\infty} dp$$

Zusammen mit dem quantenmechanischen Geometriefaktor $\frac{1}{N!}$ ergibt sich die Zustandssumme als folgendes Integral:

$$Z = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{h^3}\right)^N \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp \cdot e^{-\beta \cdot \frac{p^2}{2m}} \right)^{3N}$$

(a) Berechnen Sie das Zustandsintegral des idealen Gases mit Hilfe der Integral-Formel $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ mit $a > 0$.
(Hinweis: es empfiehlt sich zur verbesserten Lesbarkeit, während der Rechnung die thermische Wellenlänge $\lambda = \sqrt{\frac{\beta h^2}{2m\pi}}$ zu definieren.)

(b) Berechnen sie mit Hilfe der Formel

$$F = k_B \cdot T \cdot ln\,(Z)$$

die freie Energie F des idealen Gases. (Tipp: Verwenden Sie die Stirling-Näherung $N! \approx \sqrt{2\pi N} \cdot \left(\frac{N}{e}\right)^N$ und nehmen Sie an, dass $N \gg 1$)

(c) Berechnen sie den Druck des idealen Gases mit Hilfe der Formel

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}$$