

Musterlösung Thermodynamik 5

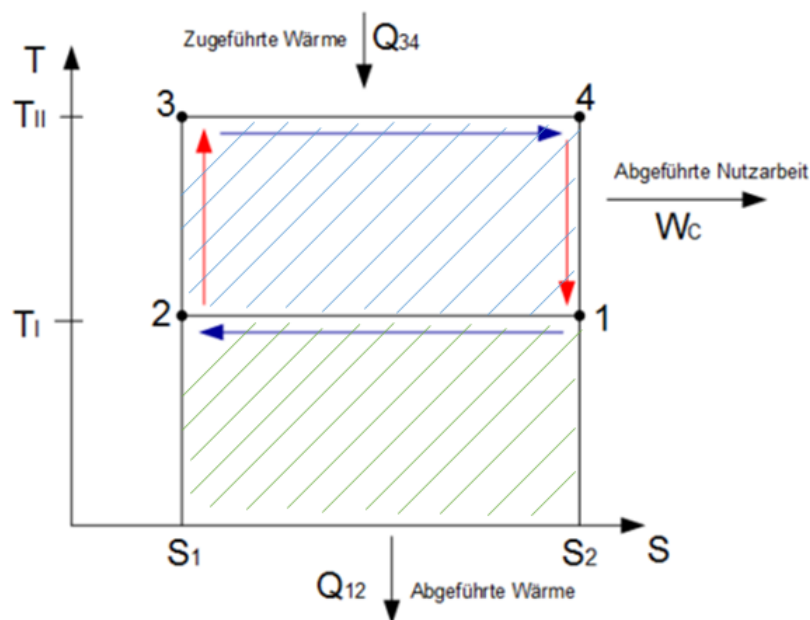
Das 5. Übungsblatt wird in der Zentralübung am Dienstag den 15. Mai
 von 12 – 14 Uhr im großen Physikhörsaal besprochen.

Teil A: Verständnisaufgaben

Aufgabe 1 – Carnot-Wirkungsgrad

Erklären Sie kurz, warum der Carnot-Wirkungsgrad der maximal mögliche Wirkungsgrad für eine Wärmekraftmaschine ist. Hinweis: Hierfür lohnt es sich ein S-T-Diagramm für einen Carnotprozess zu zeichnen.

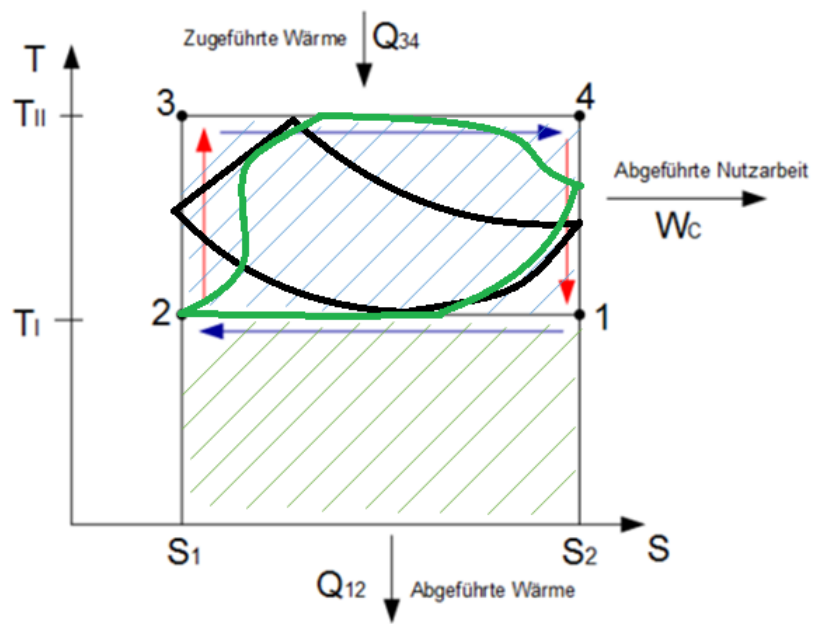
Lösung: Das S-T-Diagramm für den Carnotprozess sieht wie folgt aus:



Blaue Pfeile stellen die beiden isothermen Prozessteile des Carnot-Prozesses dar, während die roten Pfeile die adiabatischen Prozessteile darstellen. Ein Carnot-Prozess arbeitet mit Hilfe der zugeführten Wärme Q_{34} , die in die abgeführte Nutzarbeit W_C und die abgeführte Wärme Q_{12} umgesetzt wird. Für den Wirkungsgrad ergibt sich:

$$\epsilon = \frac{W_C}{Q_{34}} = \frac{W_C}{Q_{12} + W_C}.$$

Jeder andere beliebige Kreisprozess (zum Beispiel schwarz und grün) mit Maximaltemperatur T_{II} und Minimaltemperatur T_I muss dabei einen Weg innerhalb des Carnot-Rechteckes gehen:



Dabei ist der Wirkungsgrad dann am größten wenn der Flächeninhalt der Fläche am größten ist, die die Arbeit W_C charakterisiert. Die maximale Fläche W_C erhalten wir, wenn wir das Rechteck zwischen Maximaltemperatur T_{II} und Minimaltemperatur T_I wählen, was genau der Carnot-Prozess ist.

Man könnte auch einfach sagen, dass der Carnot-Prozess so konzipiert wurde, dass er der thermodynamische Kreisprozess mit dem größtmöglichen Wirkungsgrad ist.

Aufgabe 2 – Wirkungsgrad und Leistungszahl

Erklären Sie kurz den Unterschied zwischen Wirkungsgrad und Leistungszahl. Warum gibt man bei einem Dieselmotor den Wirkungsgrad und bei einer Wärmepumpe die Leistungszahl an?

Lösung: Der Wirkungsgrad ϵ gibt an, wie viel Prozent einer in einen Prozess investierten Energie (zumeist Wärme) am Ende eines Prozesses nutzbar zur Verfügung steht. Sehr grob ist der Wirkungsgrad als

$$\epsilon = \frac{E_{\text{nutzbar}}}{E_{\text{ges}}}$$

definiert, was in den meisten thermodynamischen Fällen gleich

$$\epsilon = \frac{\Delta W_C}{\Delta Q_{\text{in}}}$$

ist.

Die Leistungszahl

$$\eta = \frac{\Delta Q}{\Delta W}$$

mutet auf den ersten Blick, wie der Kehrwert des Wirkungsgrades an, hat jedoch eine etwas andere Bedeutung. Während der Wirkungsgrad verwendet wird um die Güte eines Prozesses, der aus Wärmezufuhr nutzbare mechanische Arbeit macht, zu beschreiben, wird die Leistungszahl benutzt um die Güte von Prozessen, die Wärme zwischen zwei Wärmebecken mit Hilfe von außen herein gesteckter Arbeit bewegen (vom kalten Reservoir zum warmen, also entgegen des Temperaturgradienten), zu bewerten. Die Leistungszahl gibt in diesem Fall an, wie viele Joule Wärme man unter Aufwendung eines Joules Arbeit vom einen Reservoir in das andere Reservoir schaufeln kann. Diese Anforderungen führen zu den aus der Vorlesung bekannten Definitionen.

Ein Dieselmotor ist eine klassische Wärmekraftmaschine, hier interessiert es uns, wie viel der hinein gefeuerten Energie wir am Ende als Nutzenergie zum Autofahren nutzen können. Eine Wärmepumpe „schaufelt“ Wärme aus einem kalten Reservoir in ein warmes Reservoir, sodass das eine Reservoir weiter abgekühlt wird (zum Beispiel, um einen Kühlschrank zu realisieren). In diesem Falle interessiert uns wie viel Energie wir in unseren Kühlschrank stecken müssen, um die Kühlung zu ermöglichen.

Aufgabe 3 – Joule-Thomson-Effekt

Erklären Sie kurz, worum es sich beim sogenannten Joule-Thomson-Effekt handelt. Was kann man unter Ausnutzung des Joule-Thomson-Effekts mit Hilfe eines Drosselventils machen? Wie funktioniert das?

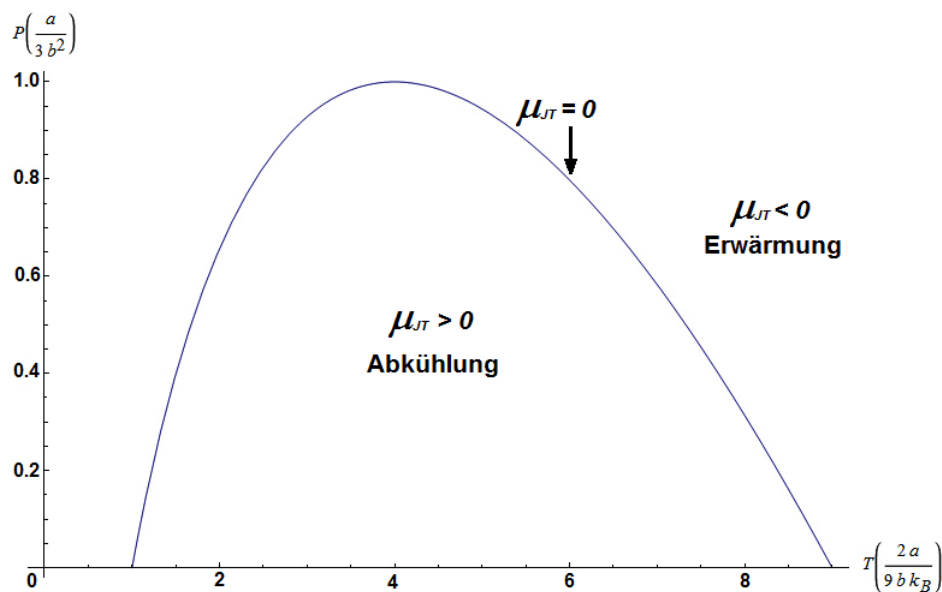
Lösung:

- Der Joule-Thomson-Effekt bezeichnet die Temperaturänderung eines Gases bei einer isenthalpen Druckminderung (irreversibler Prozess), was auf die Verrichtung von Arbeit gegen die molekularen Kräfte zurückzuführen ist. Folglich tritt dieser Effekt bei idealen Gasen nicht auf. (Isenthalp bedeutet $dH = dU + Vdp = 0$, also ohne Wärmeaustausch und ohne Arbeit am Hindernis zu verrichten.)
- Die Stärke und Richtung wird durch den sogenannten Joule-Thomson-Koeffizienten beschrieben:

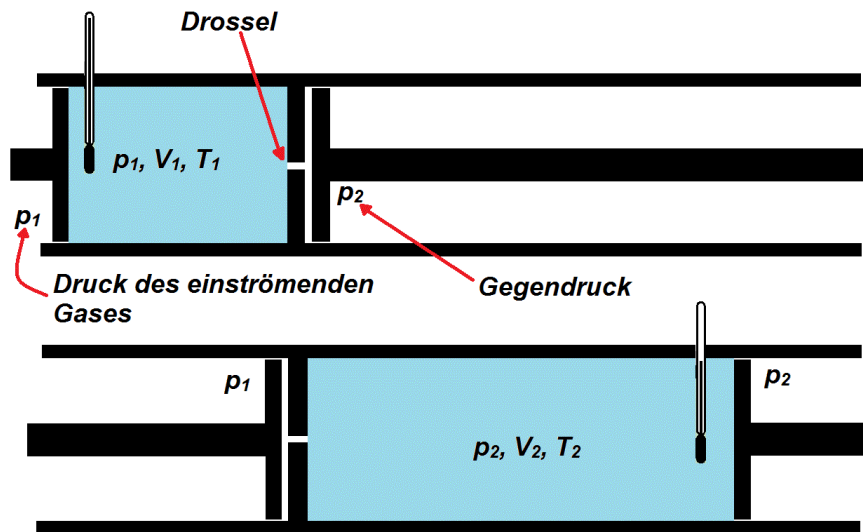
$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_H \stackrel{VDW-Gas}{=} \frac{V}{C_p} (T\alpha - 1),$$

wobei $\mu_{JT} > 0$ ein Abkühlung und $\mu_{JT} < 0$ eine Erwärmung bedeutet. Die Temperatur bei der das Verhalten wechselt und somit kein Joule-Thomson-Effekt auftritt, bei der also $\mu_{JT} = 0$ gilt, heißt Inversionstemperatur T_{inv} .

Unter Normalbedingungen gilt für die meisten Gase, dass die Temperatur bei Entspannung sinkt, dagegen steigt sie z.B. bei Wasserstoff, Helium und Neon.



- Z.B. im Linde-Verfahren wird Luft durch ein Drosselventil entspannt und durch den Joule-Thomson-Effekt abgekühlt.



Aufgabe 4 – 3. Hauptsatz

Beschreiben Sie in einem Satz die Aussage des dritten Hauptsatzes der Thermodynamik.

Lösung: Auch bekannt als Nernst'sches Theorem: Es ist nicht möglich, ein System bis zum absoluten Nullpunkt abzukühlen.

Ausführliche Lösung: Während W. Nernst um 1905 rum (20 Jahre vor der Formulierung der modernen Quantenmechanik durch Schrödinger und Heisenberg) die obige Aussage nur durch klassische Argumente postulierte, ist es inzwischen möglich diese mit Methoden der Quantenstatistik zu beweisen.

Es lässt sich zeigen, dass die Entropie unabhängig von thermodynamischen Parametern wird, wenn die Temperatur gegen null geht:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S(T, p, V, \dots) = S(T = 0) = \text{const.}$$

Wenn dies der Fall ist, verschwinden auch alle Responsefunktionen wie z.B. C_V und C_p :

$$\lim_{T \rightarrow 0} C_V = 0 \quad \lim_{T \rightarrow 0} C_p = 0.$$

Die Response des Systems auf äußere Einwirkung wird also immer schwächer und verschwindet für $T=0$ K. Dies impliziert, dass es experimentell unmöglich ist, durch Manipulationen das System an den absoluten Nullpunkt zu bringen.

Es lässt sich auch weiterhin zeigen, dass für simple Prozesse eine nicht-endliche Änderung einer Zustandsvariable (wie z.B dem Druck bei einer adiabatischen Druckänderung) benötigt wird um das System auf den absoluten Nullpunkt zu bringen.

Aufgabe 5 – Wärmetransport I

Erklären Sie kurz, wie die drei Wärmetransportmechanismen **Wärmeleitung**, **Konvektion** und **Wärmestrahlung** funktionieren. Wie wird die Wärme transportiert? Was sind die Trägerteilchen? Gibt es ein einfaches Gesetz, das die Leistung des jeweiligen Wärmetransportes in Abhängigkeit von der Temperatur angibt?

Lösung:

- **Wärmeleitung:** Schnellere Teilchen (also „warme“ Teilchen) stoßen mit langsameren Teilchen (also „kalten“ Teilchen) und übertragen auf diese Art Impuls und kinetische Energie auf diese. In der Summe werden dadurch die schnellen Teilchen langsamer und die langsamen Teilchen werden schneller. Dies führt über die Zeit zu einem Temperaturnausgleich zwischen dem warmen und dem kalten Reservoir. Die **Trägerteilchen** der Wärmeleitung sind sogenannte Stoß- oder Schwingungsquanten namens **Phononen**.

Wärmeleitung durch ein Medium kann mit Hilfe des Fourierschen Gesetzes beschrieben werden:

$$P_L = \frac{dQ}{dt} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Wobei λ der Wärmeleitkoeffizient des leitenden Mediums; A die Fläche, durch die die Wärme fließt; ΔT die Temperaturdifferenz zwischen warmem und kaltem Reservoir und Δx die Dicke des Mediums bezeichnet.

- **Konvektion:** Schnellere Teilchen (also „warme“ Teilchen) wandern/diffundieren/bewegen sich in eine Region, in der sonst langsamere Teilchen (also „kalte“ Teilchen) vorherrschen, während sich gleichzeitig die langsamen Teilchen in das Gebiet bewegen, indem vormals nur schnelle Teilchen zu finden waren. Dieser Netto-Teilchenstrom transportiert die kinetische Energie der schnellen Teilchen in das Gebiet der langsamen Teilchen und heizt dieses so in der Summe auf, während das warme Reservoir durch den Zufluss der kalten Teilchen abkühlt. Die **Trägerteilchen** sind die **Atome/Moleküle** selbst.

Leider gibt es (bisher) kein einfaches analytisches Gesetz, das Konvektion beschreibt.

- **Wärmestrahlung:** Wärmestrahlung ist ein makroskopisches Phänomen, an dessen Entstehung notwendigerweise eine Vielzahl von Teilchen und elementaren Anregungen beteiligt sind. Einem einzelnen Teilchen des strahlenden Körpers kann man keine Temperatur zuordnen, es kann nicht thermisch strahlen. Auf den genauen Mechanismus dieser Prozesse kommt es dabei nicht an. Für jeden Mechanismus ist das entstehende Spektrum thermisch, wenn nur die für thermische Anregung charakteristische Energie $k_B T$ an die für den Mechanismus typischen Energiestufen heranreicht oder sie übertrifft (k_B ist die Boltzmann-Konstante und T die Temperatur des strahlenden Körpers). Grundsätzlich ist es einfach eine Beobachtung, dass alle Körper elektromagnetische Strahlung abgeben, deren Abstrahlleistung von der Temperatur des Körpers abhängt. Die **Trägerteilchen** der Wärmestrahlung sind die Lichtquanten, die man auch **Photonen** nennt.

Mathematisch lässt sich die Abstrahlleistung der Wärmestrahlung mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz beschreiben:

$$P_{Str} = \epsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4$$

und das Abstrahlungsspektrum mit der Planck-Kurve

$$U_\nu(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu$$

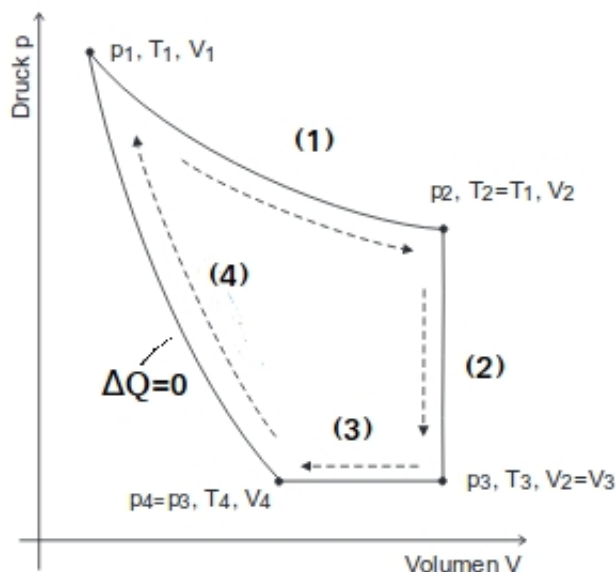
beschreiben. Dabei bezeichnet ϵ den Emissionskoeffizienten, σ die Stefan-Boltzmann-Konstante, A die strahlende Oberfläche des Körpers, T die Temperatur des Körpers, h das Plancksche

Wirkungsquantum, ν die Frequenz der emittierten Strahlung, c die Lichtgeschwindigkeit und k_B die Boltzmann-Konstante.

Teil B: Rechenaufgaben

Aufgabe 6 – Kreisprozess

Gegeben sei folgendes p-V-Diagramm eines Kreisprozesses an einem idealen Gas mit Adiabatenkoeffizient $\gamma > 1$:



- (a) Benennen Sie alle 4 Prozessschritte (1) bis (4). (Hinweis: Der Kreisprozess enthält einen isothermen, einen isochoren, einen isobaren und einen adiabatischen Prozessschritt).

Lösung:

- (1) isotherm $\Delta T = 0$
- (2) isochor $\Delta V = 0$
- (3) isobar $\Delta p = 0$
- (4) adiabatisch $\Delta Q = 0$

- (b) Bestimmen Sie für jeden Prozessweg (1) bis (4) einzeln, die in ihm verrichtete Arbeit ΔW .

Lösung:

- (1) $T = T_1 = \text{const} \Rightarrow p = \frac{Nk_B T}{V} = \frac{\text{const}}{V} \Rightarrow \Delta W = \int dW = - \int_{\Delta V} p \cdot dV = \int_{V_2}^{V_1} \frac{Nk_B T}{V} \cdot dV = Nk_B T_1 \cdot \ln(V_1/V_2)$
- (2) isochor $\Delta V = 0 \Rightarrow \Delta W = \int dW = - \int_{\Delta V=0} p \cdot dV = 0$
- (3) isobar $p = p_3 = \text{const} \Rightarrow \Delta W = \int dW = - \int_{\Delta V} p_3 \cdot dV = - \int_{V_3}^{V_4} p_3 \cdot dV = -p_3(V_4 - V_3)$
- (4) adiabatisch $\Delta Q = 0 \Rightarrow -pdV = NC_V dT \Rightarrow \Delta W = \int dW = - \int_{\Delta V} p \cdot dV = \int_{T_4}^{T_1} NC_V dT = NC_V(T_1 - T_4)$

-
- (c) Bestimmen Sie für jeden Prozessweg (1) bis (4) die Wärme, die zugeführt oder abgeführt werden muss.
-

Lösung: Gemäß dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik gilt: $\Delta U = \Delta Q - \Delta W$

Da es sich bei diesem Kreisprozess um ein ideales Gas handelt, können wir die kalorische Zustandsgleichung verwenden:

$$U_{\text{ideales Gas}} = \frac{f}{2} N k_B T$$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{f}{2} N k_B \Delta T$$

Folglich gilt simpel $\Delta Q = \Delta U - \Delta W$. Wir müssen also zunächst ΔU bestimmen.

- (1) Aus $\Delta T = 0$ folgt sofort $\Delta U = 0$
- (2) Mit $V = V_2 = \text{const}$ folgt aus der idealen Gasgleichung $\Delta T = \frac{\Delta p V}{N k_B}$ und somit $\Delta U = \frac{f}{2} N k_B \frac{\Delta p V}{N k_B} = \frac{f}{2} \Delta p V = \frac{f}{2} (p_3 - p_2) V_2$
- (3) Mit $p = p_3 = \text{const}$ folgt aus der idealen Gasgleichung $\Delta T = \frac{p \Delta V}{N k_B}$ und somit $\Delta U = \frac{f}{2} N k_B \frac{p \Delta V}{N k_B} = \frac{f}{2} p \Delta V = \frac{f}{2} p_3 (V_4 - V_3)$
- (4) Mit $\Delta Q = 0$ folgt $\Delta U = -\Delta W$

Mit diesem Wissen können wir nun die Wärme bestimmen, die zu-/abgeführt werden muss.

- (1) $\Delta Q = \Delta U - \Delta W = 0 - N k_B T_1 \cdot \ln(V_1/V_2) = N k_B T_1 \cdot \ln(V_2/V_1)$
 - (2) $\Delta Q = \frac{f}{2} (p_3 - p_2) V_2 - 0 = \frac{f}{2} (p_3 - p_2) V_2$
 - (3) $\Delta Q = \frac{f}{2} p_3 (V_4 - V_3) + p_3 (V_4 - V_3) = \frac{f+2}{2} p_3 (V_4 - V_3)$
 - (4) adiabatische Zustandsänderung $\Delta Q = 0$
-

- (d) Bestimmen Sie für jeden Prozessweg (1) bis (4) einzeln die Entropieänderung auf dem Weg.
-

Lösung: In dieser Aufgabe ist besonders zu beachten, dass die Vorzeichen so gewählt werden, dass die Entropie mit ansteigender Temperatur und ansteigendem Volumen positiv ist, also zunimmt.

- (1) mit $T = \text{const}$ gilt die Formel $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{N k_B T_1 \cdot \ln(V_2/V_1)}{T_1} = N k_B \cdot \ln(V_2/V_1)$
- (4) adiabatische Zustandsänderung $\Delta S = 0$

Für den Fall sich verändernder Temperatur müssen wir integrieren:

$$\Delta S = \int dS = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dU - dW}{T} = \int \frac{N C_V dT + p dV}{T} = C_V \ln\left(\frac{T_{ii}}{T_i}\right) + \int \frac{p dV}{T}$$

Dazu müssen wir jeweils die Temperaturänderung bestimmen:

$$T = \frac{pV}{Nk_B} \quad \Rightarrow \quad \Delta S = C_V \cdot \ln\left(\frac{p_{ii} V_{ii}}{p_i V_i}\right) + N k_B \int \frac{dV}{V} = C_V \cdot \ln\left(\frac{p_{ii} V_{ii}}{p_i V_i}\right) + N k_B \ln\left(\frac{V_{ii}}{V_i}\right)$$

- (2) mit $V = V_2 = \text{const.}$ gilt $\Delta S = C_V \cdot \ln\left(\frac{p_3 V_2}{p_2 V_2}\right) + N k_B \ln\left(\frac{V_2}{V_2}\right) = C_V \cdot \ln\left(\frac{p_3}{p_2}\right)$

$$(3) \text{ mit } p = p_3 = \text{const. gilt } \Delta S = C_V \cdot \ln\left(\frac{p_3 V_4}{p_3 V_3}\right) + Nk_B \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) = \underbrace{(C_V + Nk_B)}_{=C_p} \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)$$

- (e) Bestimmen Sie die Gesamtentropieänderung, die der Kreisprozess bei einem Umlauf erzeugt, konkret für 2 mol eines einatomigen Gases mit den folgenden Messwerten:

p_1	100 bar	V_1	1 l
p_2	60 bar	V_2	5 l
p_3	20 bar	V_3	5 l
p_4	20 bar	V_4	3 l

Tabelle 1: Messwerte für Druck und Volumen im gezeigten Kreisprozess

Was folgt aus diesem Ergebnis für den Kreisprozess?

Anmerkung: *Wie bereits vielen Studenten aufgefallen ist, sind diese Werte unplausibel, da sie nicht der idealen Gasgleichung gehorchen. Wir haben uns trotzdem dazu entschlossen, die Werte zu belassen und auch die Lösung nicht anzupassen. Es sollte einfach beachtet werden, dass diese Werte unphysikalisch sind.*

Lösung: Aus der Aufgabenstellung entnehmen wir: $\tilde{n} = 2$ mol und einatomig, d.h. $f = 3$. Daraus ergeben sich $C_V = \frac{f}{2} \tilde{n} R = \frac{3}{2} \cdot 2 \text{ mol} \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \approx 24,94 \frac{\text{J}}{\text{K}}$ und $C_p = \frac{f+2}{2} \tilde{n} R = \frac{5}{2} \cdot 2 \text{ mol} \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \approx 41,57 \frac{\text{J}}{\text{K}}$

Wir setzen nun in die Ergebnisse aus Teilaufgabe (d) ein, um die absolute Entropieänderung für jeden Schritt einzeln auszurechnen:

$$(1) \Delta S_1 = Nk_B \cdot \ln(V_2/V_1) = \tilde{n} \cdot R \cdot \ln(V_2/V_1) = 2 \text{ mol} \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot \ln\left(\frac{5\text{l}}{1\text{l}}\right) \approx 26,76 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$(2) \Delta S_2 = C_V \cdot \ln\left(\frac{p_3}{p_2}\right) = 24,94 \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot \ln\left(\frac{20 \text{ bar}}{60 \text{ bar}}\right) \approx -27,40 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$(3) \Delta S_3 = C_p \cdot \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) = 41,57 \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot \ln\left(\frac{3\text{l}}{5\text{l}}\right) \approx -21,24 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$(4) \Delta S_4 = 0 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

In der Summe erhalten wir

$$\Delta S_{ges} = \sum_{i \in \{1,2,3,4\}} \Delta S_i = 26,76 \frac{\text{J}}{\text{K}} - 27,40 \frac{\text{J}}{\text{K}} - 21,24 \frac{\text{J}}{\text{K}} + 0 \frac{\text{J}}{\text{K}} = -21,88 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Es ergibt sich ein negativer Entropiezuwachs, dies bedeutet, dass der Prozess, wenn er von (1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (4) abläuft die Gesamtentropie des Systems abnimmt. Dies ist nicht ohne Energiezufuhr möglich. Lässt man den Prozess „von selbst“ ablaufen, so läuft der Prozess umgekehrt, also (4) \rightarrow (3) \rightarrow (2) \rightarrow (1), weil in dieser Richtung Entropie zunimmt. Außerdem ist der Prozess nicht reversibel, denn $\Delta S_{ges} \neq 0$.

Anmerkung: *Dieses merkwürdige Ergebnis ist natürlich auf die falschen Messwerte in der obigen Tabelle zurückzuführen. Trotzdem ist es eine gute Übung auch mal Ergebnisse von falschen Messwerten zu interpretieren, bzw. zu überlegen, was ein negativer Entropiezuwachs bei einem Kreisprozess bedeutet.*

Aufgabe 7 – Boltzmann-Faktoren

Kaltes, interstellares Gas beinhaltet oft cyan-haltige Molekülreste (CN). CN hat drei erste angeregte Rotations-Energiezustände mit der Energie $4,7 \cdot 10^{-4}$ eV (über dem Grundzustand). Spektroskopie-Messungen solcher Gaswolken in den 1940er-Jahren ergaben, dass für jeweils 10 Moleküle, die sich im Grundzustand befanden, jeweils im Mittel 3 Moleküle im ersten angeregten Zustand waren (das entspricht also einem angeregten Molekül in jedem der drei angeregten Rotations-Energiezustände). Um dies zu erklären, schlugen die Astronomen vor, dass das Molekülgas sich im thermischen Gleichgewicht mit einer klar definierten Temperatur befindet.

Nutzen Sie Boltzmann-Faktoren ($e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$) um die Temperatur zu bestimmen, die zu dem beobachteten thermischen Gleichgewicht gehört.

Lösung:

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{g_1 \exp\left(\frac{E_1}{k_B T}\right)}{g_0 \exp\left(\frac{E_0}{k_B T}\right)} = \frac{g_1}{g_0} \exp\left[\frac{-(E_1 - E_0)}{k_B T}\right] = \frac{g_1}{g_0} \exp\left[\frac{-\Delta E}{k_B T}\right],$$

wobei die Faktoren g_1 und g_0 die Entartung des ersten angeregten bzw. des Grundzustandes darstellen. Umstellen nach T und anschließendes Einsetzen der Werte aus der Angabe ergibt

$$T = \frac{\Delta E}{k_B \ln\left(\frac{N_0 g_1}{N_1 g_0}\right)} = \frac{4,7 \cdot 10^{-4} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1,39 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot \ln\left(\frac{10 \cdot 3}{3 \cdot 1}\right)} = 2,35 \text{ K}.$$

Aufgabe 8 – Computer-Entropie

Eine weitere interessante Anwendung des Entropiebegriffs, bzw. der Größe Entropie findet sich in der Informationstheorie. In dieser Aufgabe wollen wir uns damit befassen, wie weit man den aus der Thermodynamik verwendeten Begriff der Entropie auf einen Computer übertragen kann.

Ein Bit eines Computerspeichers ist ein physikalisches Objekt, welches in zwei Zuständen sein kann und wird oft mit 0 oder 1 angegeben. Ein Byte sind acht Bits, ein Kilobyte sind $2^{10} = 1024$ Bytes, ein Megabyte 1024 Kilobytes und ein Gigabyte 1024 Megabytes.

- (a) Nehmen Sie an, ein Computer löscht oder überschreibt ein Gigabyte Speicher und vernichtet jegliche Spuren zu der geänderten Information. Erklären Sie, warum dies eine bestimmte, minimale Entropie erzeugen muß und rechnen Sie sie diese aus.

Hinweis: Nehmen Sie dazu an, dass alle 1Gigabyte-Zustände zu einem makroskopisch ununterscheidbaren Zustand gehören. Anders gesagt: Aus einem Gigabyte Mikrozuständen wird ein einziger 1Gigabyte-Makrozustand. Nehmen Sie außerdem an, dass nach dem Löschen dieses Makrozustandes jeder Mikrozustand zufällig auf 1 oder 0 gesetzt sein könnte.

Lösung:

- Alle 1Gigabyte-Zustände werden zu einem makroskopisch ununterscheidbaren Zustand. Die Information zwischen den Mikrozuständen ging in diesem Fall verloren. Anders gesagt: Aus einem Gigabyte Makrozuständen wird ein einziger 1Gigabyte-Zustand, aus 10^9 Mikrozuständen. Für das Phasenraumvolumen bedeutet dies: $\Omega_{vorher} = 1$, $\Omega_{nachher} = 2^{(8 \cdot 1024^3)}$
- Das Phasenraumvolumen ergibt sich zu $\Omega_{nachher} = 2^{(8 \cdot 1024^3)}$, weil jeder Speicherstand besetzt oder unbesetzt sein kann, es also 2 mögliche Zustände für ihn gibt. Die Gesamtzahl aller möglichen Zustände beträgt also $\#Zustände = \Omega_{nachher} = 2^{\text{Zahl der Speicherzustände}}$. Jedes Byte besteht aus 8 Bits. Und 1 Gigabyte sind $(2^{10})^3$ Zustände. Insgesamt gibt es also in einem Gigabyte $8 \cdot 1024^3$ Speicherstellen.
- Wir setzen dies in die Formel für die Boltzmannentropie ein und erhalten $\Delta S = k \cdot [\ln(\Omega_{nachher}) - \ln(\Omega_{vorher})] = k \cdot [8 \cdot 1024^3 \cdot \ln(2) - \ln(1)] \approx 8,2 \cdot 10^{-14} J/K$

-
- (b) Wenn diese Entropie in die Umwelt bei Raumtemperatur abgegeben wird, wieviel Wärme ist damit verbunden? Ist diese Wärmemenge signifikant?

Lösung:

- Der Einfachheit wegen berechnen wir die zur Entropieerhöhung gehörige Entropie, mit einer konstant angenommenen Temperatur $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Dann gilt unsere altbekannte Formel: $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} \Rightarrow \Delta Q = \Delta S \cdot T$
- Um abzuschätzen, wie signifikant diese Wärme ist, berechnen wir, um wie viel Grad sich 1 g Wasser durch die Wärmezufuhr erhitzen würde.

$$\Delta T = \Delta Q / c_V = \Delta S \cdot T / c_V \approx 5,8 \cdot 10^{-12} K$$

- Diese Temperaturerhöhung ist nicht wirklich signifikant. Entsprechend auch die Wärmehöhen.
-

Aufgabe 9 – Wärmeleitung durch ein Fenster

Ein Fenster habe die Abmessungen $1,5 \text{ m} \times 0,8 \text{ m}$ und eine Glasdicke $d_G = 4,5 \text{ mm}$. Die Außentemperatur an der Glasscheibe sei $T_{\text{außen}} = 5 \text{ }^\circ\text{C}$ und die im Raum sei $T_{\text{innen}} = 23 \text{ }^\circ\text{C}$. Die Wärmeleitfähigkeit von Glas beträgt $\lambda_{\text{Glas}} \approx 0,84 \text{ J}/(\text{s K m})$.

- (a) Berechnen Sie wie viel Joule Wärme pro Sekunde durch die Glasscheibe entweicht, wenn Sie lediglich Wärmeleitung durch die Glasscheibe betrachten. *Hinweis: Das Ergebnis wird unrealistisch groß sein.*

Lösung: Hernehmen des Fourier'schen Gesetzes und Einsetzen (mm in m umrechnen nicht vergessen) ergibt

$$\dot{Q} = \frac{\lambda_G}{d_G} A (T_{\text{innen}} - T_{\text{außen}}) = 4032 \text{ W},$$

was tatsächlich unrealistisch groß ist.

-
- (b) In der Realität muss die Wärme aus dem Raum durch die Luftschichten an den Fensterscheiben geleitet werden. Der effektivste Mechanismus ist hierbei die Konvektion. Die Reibung am Glas behindert jedoch die Konvektion und man kann daher eine nahezu ruhende Luftschicht von etwa $d_{\text{Luft}} = 5 \text{ mm}$ an beiden Seiten des Glases annehmen. Die Wärmeleitfähigkeit von Luft ist $\lambda_{\text{Luft}} \approx 0,0262 \text{ J}/(\text{s K m})$. Berechnen Sie erneut wie viel Joule Wärme pro Sekunde durch die Glasscheibe entweicht.

Lösung: Es gilt

$$\dot{Q}_1 = \frac{\lambda_1}{d_1} A (T_{\text{innen}} - T_1),$$

$$\dot{Q}_2 = \frac{\lambda_2}{d_2} A (T_1 - T_2),$$

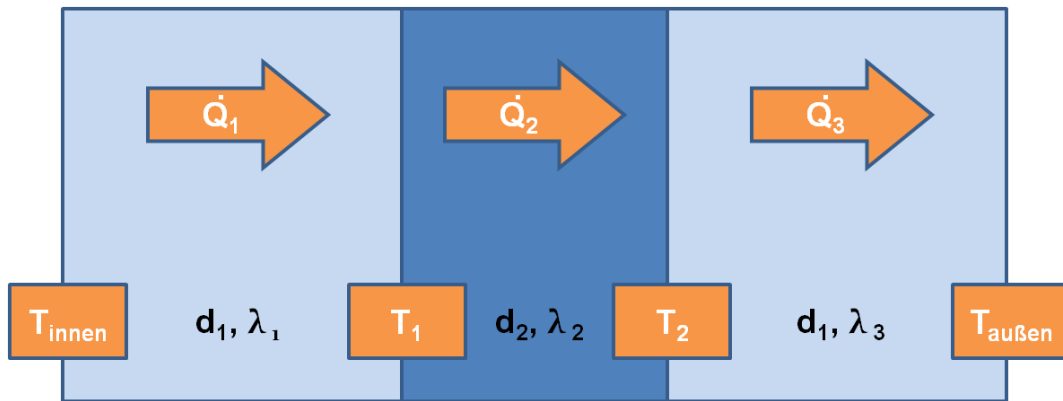
$$\dot{Q}_3 = \frac{\lambda_3}{d_3} A (T_2 - T_{\text{außen}}).$$

Da es sich näherungsweise um einen statischen Vorgang handelt (d.h. $dT/dt = 0$), muss aufgrund von Energieerhaltung durch jede Schicht der selbe Wärmestrom fließen: $\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = \dot{Q}_3 \equiv \dot{Q}$ (Siehe Skizze weiter unten).

Eliminieren der Zwischentemperaturen ergibt letztlich folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} A(T_{\text{innen}} - T_{\text{außen}}) &= A(T_{\text{innen}} - T_1 + T_1 - T_2 + T_2 - T_{\text{außen}}) \\ &= A(T_{\text{innen}} - T_1) + A(T_1 - T_2) + A(T_2 - T_{\text{außen}}) \\ &= \dot{Q} \left(\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} \right) \\ \implies \dot{Q} &= \left(\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} \right)^{-1} A(T_{\text{innen}} - T_{\text{außen}}) \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt $\dot{Q} = 55,8 \text{ W}$, was deutlich kleiner ist als das Ergebnis aus der (a).



- (c) Europäische Energieexperten empfehlen, Häuser nur auf $T_{innen} = 18\text{ °C}$ zu heizen. Berechnen Sie wie viel Prozent Heizenergie eingespart werden können, wenn bei einer Außentemperatur von $T_{außen} = 5\text{ °C}$ nur auf $T_{innen} = 18\text{ °C}$, anstatt $T_{innen} = 23\text{ °C}$ geheizt wird.

Lösung:

$$\dot{Q}(T_{innen} = 18\text{ °C}) = 40,3\text{ W} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{Q}(T_{innen} = 23\text{ °C}) - \dot{Q}(T_{innen} = 18\text{ °C})}{\dot{Q}(T_{innen} = 23\text{ °C})} = 27,8\%$$

Teil C: Bonusaufgaben

Diese Aufgaben müssen nicht bearbeitet werden. Sie werden aber im Falle einer Bearbeitung ebenfalls mit 1 oder 2 Punkten bewertet, die als Bonuspunkte gesammelt werden können.

Aufgabe 10 – kanonische Zustandssumme und freie Energie

Gegeben sei die kanonische Zustandssumme $Z = \sum_i e^{-\beta \cdot E_i}$, dabei ist e die eulersche Zahl, $\beta = \frac{1}{k_B T}$ und E_i die Energie des i -ten Zustands. Zur Vereinfachung wollen wir in dieser Aufgabe davon ausgehen, dass es nur eine endliche Menge an E_i sind, also $i \in [1, 2, \dots, M]$, $M \in \mathbb{N}$.

- (a) Der Energieerwartungswert in einem System mit kanonischer Zustandssumme $Z = \sum_i e^{-\beta \cdot E_i}$ kann wie folgt berechnet werden:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{Z} \cdot \sum_i E_i \cdot e^{-\beta \cdot E_i}$$

Zeigen Sie, dass dies gleich dem folgenden Ausdruck ist:

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln(Z)$$

Lösung

Zunächst müssen wir Rückableiten, sprich uns der Tatsache bewusst werden, dass $-\frac{\partial}{\partial \beta} Z = \sum_i -\frac{\partial}{\partial \beta} \cdot e^{-\beta \cdot E_i} = \sum_i E_i \cdot e^{-\beta \cdot E_i}$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = \frac{1}{Z} \cdot \sum_i E_i \cdot e^{-\beta \cdot E_i} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} Z$$

Jetzt müssen wir die Kettenregel rückwärts anwenden, um zu sehen, dass $-\frac{\partial}{\partial \beta} \ln(Z(\beta)) = -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} Z$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} Z = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln(Z)$$

-
- (b) Für die Entropie mit kanonischer Zustandssumme $Z = \sum_i e^{-\beta \cdot E_i}$ gilt

$$S = -\frac{k_B}{Z} \cdot \sum_i \left(e^{-\beta E_i} \cdot \ln \left(\frac{e^{-\beta E_i}}{Z} \right) \right)$$

Zeigen Sie unter der Annahme, dass $U = \langle E \rangle$, mit Hilfe der Beziehung $F = U - T \cdot S$, dass für die Funktion F gilt:

$$F = -k_B \cdot T \cdot \ln(Z)$$

Anmerkung: Hier gab es einen Vorzeichenfehler in der ursprünglichen Angabe.

Tipp 1: $\beta = \frac{1}{k_B \cdot T}$

Tipp 2: Bringen Sie die Entropie S zunächst auf die Form $S = \frac{1}{T} \cdot \langle E \rangle + k_B \cdot \ln(Z)$

Lösung: Zuerst bringen wir die Entropie S auf eine etwas einfachere Darstellung:

$$S = -\frac{k_B}{Z} \cdot \sum_i \left(e^{-\beta E_i} \cdot \ln \left(\frac{e^{-\beta E_i}}{Z} \right) \right) = -\frac{k_B}{Z} \cdot \sum_i \left(e^{-\beta E_i} \cdot (-\beta E_i - \ln(Z)) \right)$$

$$= -\frac{k_B}{Z} \cdot \sum_i (-e^{-\beta E_i} \cdot \beta E_i) - \frac{k_B}{Z} \cdot \sum_i (-e^{-\beta E_i} \ln(Z))$$

Wir erkennen den ersten Term als $\frac{k_B}{Z} \cdot \sum_i (-e^{-\beta E_i} \cdot \beta E_i) = k_B \cdot \beta \cdot \frac{1}{Z} \cdot \sum_i E_i \cdot e^{-\beta \cdot E_i} = k_B \cdot \beta \cdot \langle E \rangle$ aus Teilaufgabe (a)

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &= k_B \cdot \beta \cdot \langle E \rangle + \frac{k_B}{Z} \cdot \sum_i (e^{-\beta E_i} \ln(Z)) = k_B \cdot \beta \cdot \langle E \rangle + \frac{k_B}{Z} \cdot \ln(Z) \cdot \sum_i (e^{-\beta E_i}) \\ &= k_B \cdot \beta \cdot \langle E \rangle + \frac{k_B}{Z} \cdot \ln(Z) \cdot Z = k_B \cdot \beta \cdot \langle E \rangle + k_B \cdot \ln(Z) \end{aligned}$$

Mit $\beta = \frac{1}{k_B \cdot T}$ gilt dann $k_B \cdot \beta = \frac{1}{T}$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{T} \cdot \langle E \rangle + k_B \cdot \ln(Z)$$

Diese deutlich angenehmere Darstellung für S erlaubt uns nun schnell einen schönen Ausdruck für F zu finden:

$$\begin{aligned} F = U - T \cdot S &= \langle E \rangle - T \cdot \left(\frac{1}{T} \cdot \langle E \rangle + k_B \cdot \ln(Z) \right) = \langle E \rangle - \langle E \rangle - T \cdot k_B \cdot \ln(Z) \\ \Rightarrow F &= -k_B T \ln(Z) \end{aligned}$$

Aufgabe 11 – Zustandssumme des idealen Gases

Diese Aufgabe führt uns vor, wie mächtig das Hilfsmittel der kanonischen Zustandssumme ist. Wir wollen nun alleine aus der Annahme, dass ein ideales Gas aus „freien Teilchen“ mit $E = \frac{p^2}{2m}$ besteht, die ideale Gasgleichung herleiten, die wir schon aus der ersten Vorlesung kennen. Diese Aufgabe führt vor, dass tatsächlich die Annahmen des idealen Gases, wie sie bereits auf Blatt 2 abgefragt und besprochen wurden, zur bekannten idealen Gasgleichung führen.

Für ein ideales Gas gilt, dass alle möglichen Energiezustände $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ möglich sind. Dadurch wird die Zustandssumme zu einem Integral, der Form:

$$Z = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{h^3} \right)^N \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp \cdot e^{-\beta \cdot \frac{p^2}{2m}} \right)^{3N}$$

- (a) Berechnen Sie das Zustandsintegral des idealen Gases mit Hilfe der Integral-Formel $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ mit $a > 0$.
(Hinweis: es empfiehlt sich zur verbesserten Lesbarkeit, während der Rechnung die thermische Wellenlänge $\lambda = \sqrt{\frac{\beta h^2}{2m\pi}}$ zu definieren.)

Lösung:

$$Z = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{h^3} \right)^N \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp \cdot e^{-\beta \cdot \frac{p^2}{2m}} \right)^{3N} = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{h^3} \right)^N \cdot \left(\sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}} \right)^{3N} = \frac{1}{N!} \left[V \cdot \left(\sqrt{\frac{2m\pi}{\beta h^2}} \right)^3 \right]^N$$

An dieser Stelle empfiehlt es sich die thermische Wellenlänge $\lambda = \sqrt{\frac{\beta h^2}{2m\pi}}$ zu definieren. Damit vereinfacht sich noch einmal der Ausdruck:

$$Z = \frac{1}{N!} \cdot \left(\frac{V}{\lambda^3} \right)^N$$

-
- (b) Berechnen sie mit Hilfe der Formel

$$F = -k_B \cdot T \cdot \ln(Z)$$

die freie Energie F des idealen Gases. (Tipp: Verwenden Sie die Stirling-Näherung $N! \approx \sqrt{2\pi N} \cdot \left(\frac{N}{e}\right)^N$ und nehmen Sie an, dass $N \gg 1$)

Anmerkung: Hier gab es einen Vorzeichenfehler in der ursprünglichen Angabe.

Lösung: Kurze Wiederholung der Logarithmusgesetze: (I) $\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$; (II) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$; (III) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
Danach geht's direkt los:

$$F = -k_B \cdot T \cdot \ln(Z) = -k_B \cdot T \cdot \ln\left(\frac{1}{N!} \cdot \left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N\right) = -k_B \cdot T \cdot [-\ln(N!) + N \cdot \ln(V) - 3N \cdot \ln(\lambda)]$$

Wir wenden die Stirling-Näherung an

$$F \approx -k_B \cdot T \cdot \left[-\ln\left(\sqrt{2\pi N} \cdot \left(\frac{N}{e}\right)^N\right) + N \cdot \ln(V) - 3N \cdot \ln(\lambda) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= -k_B \cdot T \cdot \left[-\ln(\sqrt{2\pi}) - \ln(N) - N \cdot \ln(N) + N \cdot \ln(e) + N \cdot \ln(V) - 3N \cdot \ln(\lambda) \right] \\
&= -k_B \cdot T \cdot \left[-\ln(\sqrt{2\pi}) - (N+1) \cdot \ln(N) + N + N \cdot \ln(V) - 3N \cdot \ln(\lambda) \right]
\end{aligned}$$

Näherungsweise gilt $N \approx N+1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow F &= -k_B \cdot T \cdot \left[-\ln(\sqrt{2\pi}) - N \cdot \ln(N) + N + N \cdot \ln(V) - 3N \cdot \ln(\lambda) \right] \\
&= -k_B \cdot T \cdot N \cdot [-\ln(N) + 1 + N \cdot \ln(V) - 3 \cdot \ln(\lambda)] + k_B \cdot T \cdot \ln(\sqrt{2\pi})
\end{aligned}$$

(c) Berechnen sie den Druck des idealen Gases mit Hilfe der Formel

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N}$$

Lösung:

$$p = - \left(\frac{\partial}{\partial V} \right)_{T,N} -k_B \cdot T \cdot N \cdot [-\ln(N) + 1 + N \cdot \ln(V) - 3 \cdot \ln(\lambda)] - k_B \cdot T \cdot \ln(\sqrt{2\pi})$$

praktischerweise werden alle Summanden, die nicht V enthalten beim Ableiten zu 0

$$\Rightarrow p = \left(\frac{\partial}{\partial V} \right)_{T,N} k_B \cdot T \cdot N \cdot [N \cdot \ln(V)] = \frac{k_B \cdot T \cdot N}{V}$$

Aus diesem Ergebnis folgt in einem einzigen Schritt, die ideale Gasgleichung:

$$p \cdot V = N \cdot k_B \cdot T$$

Es sollte nicht unterschätzt werden, was wir soeben ausgerechnet haben. Es mag wenig originell erscheinen, dass wir am Ende einer Aufgabe über das ideale Gas die ideale Gasgleichung erhalten, trotzdem sollte überlegt werden, welche Annahmen wir in unsere Rechnung gesteckt haben. Diese war nämlich ausschließlich, dass sich die Gasteilchen innerhalb des Gasvolumens frei bewegen können ($E_i = \frac{p_i^2}{2m}$). Mit Hilfe der Rechenwerkzeuge, die wir auf diesem Blatt kennen gelernt haben, konnten wir also aus der simplen Modellannahme, dass sich die Teilchen im idealen Gas nicht spüren, die allgemeine Gasgleichung herleiten.

Es lohnt sich sehr die verborgenen Zusammenhänge der Thermodynamik kennen und verstehen zu lernen, denn sonst verkommt die Thermodynamik zu einer Zusammenstellung einzelner Experimente und Phänomene, die scheinbar keinen Zusammenhang besitzen. Die Zusammenhänge der Thermodynamik stecken verborgen in ihrem statistischen Charakter, der in der Zustandssumme und den thermodynamischen Potentialen beschrieben wird. Wir hoffen sehr, dass dieses Blatt ein gewisses Interesse geweckt hat, sich auch mit den grundlegenden Konzepten der Thermodynamik zu befassen.