Übungsblatt Elektrodynamik 1 - Musterlösung

Besprechung in der Woche vom 04.06.18 bis 08.06.18

Teil A: Verständnisaufgaben

Aufgabe 1 – Ladungen auf einem Kreisumfang

Diese Aufgabe bringt bis zu 2 Punkte

(a) Fünf Ladungen jeweils mit Ladung q sind symmetrisch, also äquidistant, auf einem Kreis mit Radius R verteilt. Wie stark ist das elektrische Feld E in der Mitte des Kreises?

Lösung:

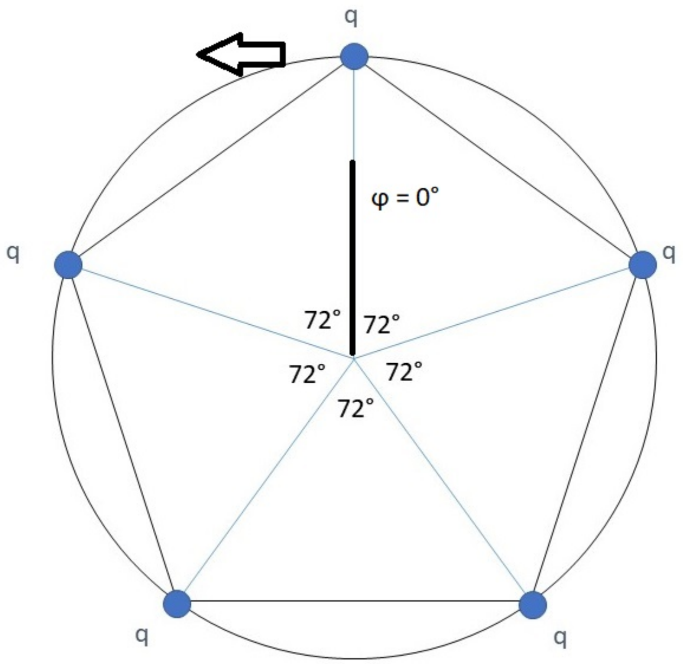


Abbildung 1: Skizze der 5 Punktladungen auf einem Kreis mit Radius R

Anmerkung: Diese Aufgabe kann man auf zwei Arten lösen. Einmal, durch eine einfache Überlegung oder über eine ausführliche Rechnung. Es ist völlig ausreichend, nur die Überlegung hinzuschreiben, zur Vollständigkeit, soll aber auch der Rechenweg aufgeführt werden.

Einfache Überlegung

Eine Probeladung, die sich genau in der Mitte des Kreises befindet, dürfte sich gar nicht bewegen, denn alle Ladungen drücken über ihre Coulombkraft gleich stark an der Ladung.

Dabei drücken alle isotrop verteilt, da die Ladungsverteilung auf dem Kreis symmetrisch ist, also müssten sich die Gesamtkraftwirkungen aufheben. Daher gilt:

$$\vec{E}(0) = 0$$

Rechung:

Da diese Lösung vor allem bei 5 oder jeder weiteren ungeraden Ladungsanzahl unanschalich ist, möchten wir hier nun das Feld im Mittelpunkt expizit ausrechnen.

Das elektrische Feld einer Ladungsverteilung beträgt:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_i Q_i \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r_i}}{\left|\vec{r} - \vec{r_i}\right|^3}$$

Hierbei bezeichnet $\vec{r}$ den Punkt an dem wir uns befinden, also $\vec{r} = 0$ und $\vec{r_i}$ den Ort der i. Ladung.

$$\vec{E}(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_i q \cdot \frac{-\vec{r_i}}{\left|\vec{r_i}\right|^3}$$

Diese Aufgabe lässt sich deutlich einfacher in Polarkoordinaten rechnen. Dazu definieren wir die oberste Ladung als $\phi = 0$ (Das System ist dann rechtshändig, also gegen den Uhrzeigersinn, wie der schwarze Pfeil anzeigt). Ein Punkt auf dem Ladungskreis ist definiert als:

$$\vec{r}(\varphi) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Das praktische an diesem Vektor ist, dass der Betrag unabhängig vom Winkel ist: Die 5 Winkel sind $\varphi = \{0°, 72°, 144°, 216°, 288°\}$

Damit ergibt sich

$$\vec{E}(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_i \cdot \frac{R}{R^3} \cdot \begin{pmatrix} \cos(0°) + \cos(72°) + \cos(144°) + \cos(216°) + \cos(288°) \\ \sin(0°) + \sin(72°) + \sin(144°) + \sin(216°) + \sin(288°) \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Dieses Ergebnis entspricht exakt dem, was wir aus unserer Überlegung erwarten würden.

(b) Was ist das elektrische Potential in der Mitte des Kreises?

Lösung: Für das elektrostatische Potential gilt:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi$$

Wenn das Feld E in der Mitte des Kreises 0 ist, wie in Aufgabenteil (a) ausgerechnet, dann muss das elektrostatische Potential ϕ an dieser Stelle folglich konstant sein. Ob es 0 ist, hängt davon ab, wo man die Erdung wählt. Dies ist in dieser Aufgabe aber nicht klar definiert. Weiter als $\phi = const$ kommen wir hier nicht hinaus.

Aufgabe 2 – Feldlinien

Diese Aufgabe bringt bis zu 2 Punkte

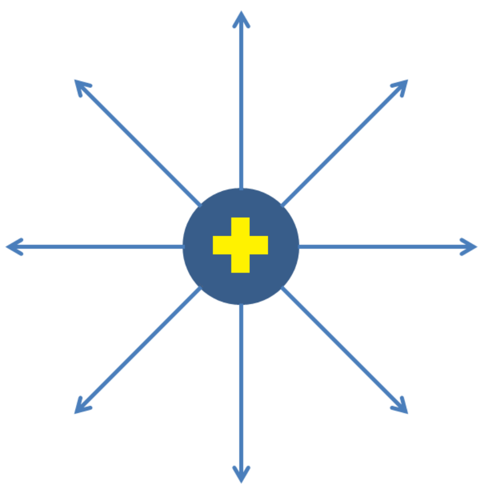
(a) Beschreiben Sie kurz was sogenannte Feldlinien sind. Warum wurden Feldlinien eingeführt? Von welcher Ladung gehen sie zu welcher Ladung? Warum wurde diese Richtung gewählt?

Lösung: Im Gegensatz zur klassischen Mechanik, in der wir uns für Pfade von Teilchen $\vec{x}_i(t)$ interessieren, geht es im Elektromagnetismus um die Dynamik des elektromagnetischen Feldes zwischen geladenen Teilchen selbst. Mathematisch betrachten wir nun nicht mehr Pfade $\vec{x}_i(t)$, sondern Vektorfelder, d.h. Funktionen vom Ort und der Zeit $\vec{E}(x,t)$.

Man kann sich diese durch sog. Feldlinien, aus denen man sowohl den Betrag als auch die Richtung des Felds ablesen kann, veranschaulichen. Diese sind definiert als **Pfade von positiven Probeladungen, welche in jedem Punkt und zu jeder Zeit tangential zum Feldvektor $\vec{E}(x,t)$ verlaufen und differenzierbar sind**. (Man kann daher die Feldlinien auch Kraftlinien nennen, da sie in die Richtung der Kraft zeigen, die auf eine positive Probeladung wirkt). Folglich zeigen elektrische Feldlinien von positiven zu negativen Ladungen. (Vgl. Tipler, Kapitel 18.5)

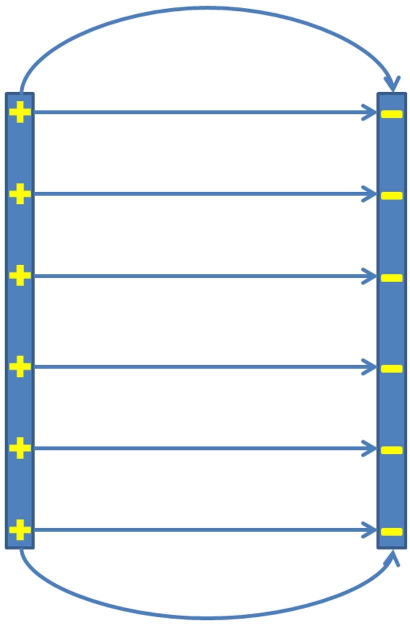
(b) Skizzieren Sie die Feldlinien, wenn nur eine einzelne punktförmige positive Ladung in einem Volumen V zu finden ist.

Lösung:



(c) Skizzieren Sie die Feldlinien zwischen einer positiv geladenen Platte und einer negativ geladenen Platte.

Lösung:



Aufgabe 3 – geladene Kugelschalen

Zwei sehr dünne Kugelschalen mit Radius d mit konstanter Ladungsdichte ρ_0 und Gesamtladung Q befinden sich in einem Abstand von $10d$. Nun wird eine Probepunktladung q innerhalb der einen Kugelschale und $d/2$ rechts vom Mittelpunkt der linken Kugelschale positioniert (siehe Abbildung). Welche Kraft wirkt auf die Probeladung q unter der Annahme, dass die Kugelschalen ortsfest sind? In welche Richtung wirkt diese Kraft?

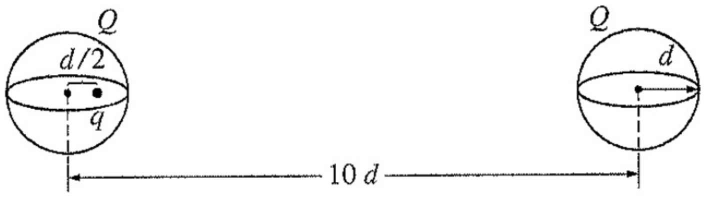


Abbildung 2: Skizze der geladenen Kugelschalen mit Radius d und der Probeladung q innerhalb der einen Kugelschale.

Lösung: Wir benutzen nun das Superpositionsprinzip, welches besagt, dass die resultierende Kraft von N Ladungen auf eine Probeladung gleich der Summe der einzelnen Kräfte auf die Probeladung ist. In dieser Aufgabe wäre $N = 2$, jedoch erzeugt die linke Kugelschale kein Feld in ihrem Inneren, sodass wir lediglich einen Term haben:

$$F = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0|0,5d - 10d|^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0|-9,5d|^2} = \frac{qQ}{361\pi\epsilon_0 d^2}.$$

Wenn Q und q beide positiv oder beide negativ geladen sind, dann wird die Probeladung abgestoßen, während sie angezogen wird, wenn eine der beiden positiv und die andere negativ geladen ist.

Aufgabe 4 – Integralsatz von Gauß

Eine in der y-z-Ebene unendlich ausgedehnte Fläche mit konstanter Flächendichte σ schneidet eine Kugel mit Radius R im Abstand x (siehe Abbildung). Bestimmen sie den elektrischen Fluss Φ durch die Kugel, die sie als Gaußfläche betrachten dürfen.

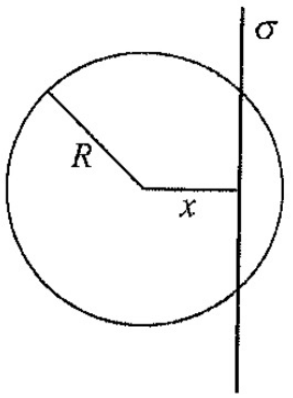


Abbildung 3: Skizze der Kugel und der unendlich ausgedehnten Fläche in 2D

Lösung: Wir benutzen die Definition des Flusses Φ, den Satz von Gauß und das Gaußsche Gesetz:

$$\Phi = \int_{\partial\Omega} d\vec{S} \cdot \vec{E} = \int_{\Omega} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int_{\Omega} dV \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0},$$

wobei Ω das innere und $\partial\Omega$ den Rand der Kugel bezeichnen. Die Ladung im inneren der Kugel ist das Produkt aus der Flächendichte und der Fläche, sodass

$$\Phi = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \pi \big(R^2 - x^2\big).$$

Aufgabe 5 – Elektrostatisches Potential

Ein dünner, nicht leitender Ring mit Radius R, konstanter Ladungsdichte und mit Gesamtladung Q befindet sich ortsfest in der y-z Ebene. Bestimmen sie das elektrostatische Potential ϕ im Punkt P, der auf der Symmetrieachse durch den Ring liegt und der einen Abstand x vom Ringmittelpunkt entfernt ist (siehe Skizze).

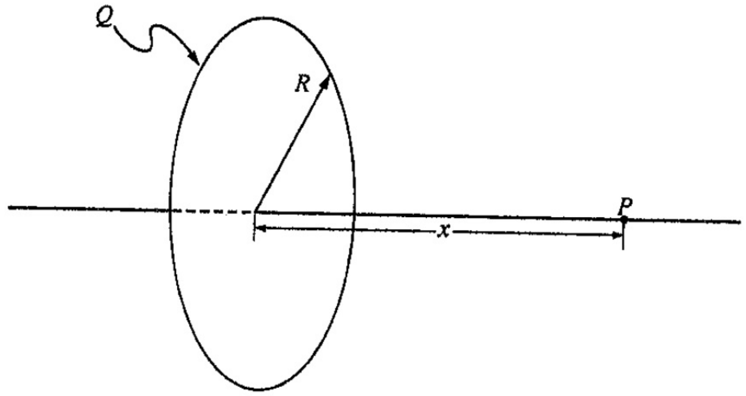


Abbildung 4: Ring mit Gesamtladung Q und Punkt P auf der Symmetrieachse des Kreises

---

Lösung: Wir wissen, dass das Potential einer Punktladung mit Gesamtladung q im Abstand r gegeben ist durch

$$\phi_{PL}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Wir benutzen nun wieder das Superpositionsprinzip. Da wir hier ein ,,Kontinuum von Punktladungen" haben, entspricht eine Punktladung einer infinitesimalen Ladung im Ring und wir müssen die Summe mit einem Integral ersetzen:

$$\phi(r) = \int d\phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int dq = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \phi(\infty).$$

Hierbei entspricht $\phi(\infty)$ dem elektrostatischen Potential im Unendlichen (von da haben wir implizit unsere Integration gestartet). Da wir die Erdung belibig wählen dürfen, setzten wir der Einfachheit $\phi(\infty) = 0$ und um die x-Abhängigkeit des Ergebnisses explizit zu schreiben, nutzen wir den Satz des Pythagoras. Dann erhalten letztlich

$$\phi(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}}.$$

Anmerkung: Mit obigem Lösungsverfahren können wir lediglich das Potential auf der x-Achse auf diese relativ einfache Weise bestimmen, da der Punkt P zu allen ,,Punktladungen" den gleichen Abstand r hat. Für einen beliebigen Punkt würde jede der ,,Punktladungen an den Orten $\vec{r}'$" einen anderen Beitrag zum Gesamtpotential bringen, d.h $r \to |\vec{r} - \vec{r}'|$ und $dq \to dq(\vec{r}') = \rho(\vec{r}')d^3r'$, was die Rechnung deutlich schwieriger macht.

Teil B: Rechenaufgaben

Aufgabe 6 – Diffusion

(a) Was sind die Diffusionskoeffizienten für ein kleines Molekül (z.B. Glukose; $R \sim 1\,\text{nm}$), ein typisches Protein ($R \sim 5\,\text{nm}$) und ein Bakterium ($R \sim 1\,\mu\text{m}$), die sie jeweils als Kugeln nähern können, bei Raumtemperatur in wässriger Lösung.

Hinweis: Die Viskosität von Wasser bei Raumtemperatur ist $0,001$ Pa·s.

Lösung: Aus der Vorlesung wissen, wir, dass wir für kleine kugelförmige Objekte in Lösung und für kleine Reynoldszahlen folgende Formulierung der Diffusionskoeffizienten verwenden können:

$$D = \frac{k_B T}{\gamma} = \frac{k_B T}{6\pi\eta R}$$

wobei γ der Reibungskoeffizient ist, η die Viskosität des Lösungsmittels und R der Radius des kugelförmigen Objektes. ***Verständnisfrage:*** *Warum nur für kleine Objekte und kleine Reynoldszahlen?*

Jetzt müssen wir nur noch einsetzen:

Glukose:

$$D_G = \frac{k_B T}{\gamma} = \frac{k_B T}{6\pi\eta R} = \frac{1,381 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K} \cdot (273,15+20)\ K}{6 \cdot \pi \cdot 0,001\ Pa \cdot s \cdot 10^{-9}\ m} \approx 2,147 \cdot 10^{-10}\ \frac{m^2}{s}$$

Protein:

$$D_G = \frac{k_B T}{\gamma} = \frac{k_B T}{6\pi\eta R} = \frac{1,381 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K} \cdot (273,15+20)\ K}{6 \cdot \pi \cdot 0,001\ Pa \cdot s \cdot 5 \cdot 10^{-9}\ m} \approx 4,295 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^2}{s}$$

Bakterie:

$$D_G = \frac{k_B T}{\gamma} = \frac{k_B T}{6\pi\eta R} = \frac{1,381 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K} \cdot (273,15+20)\ K}{6 \cdot \pi \cdot 0,001\ Pa \cdot s \cdot 10^{-6}\ m} \approx 2,147 \cdot 10^{-13}\ \frac{m^2}{s}$$

(b) Wie weit diffundieren das Molekül, das Protein und das Bakterium in 1D in 1 s, 1 h, einem Tag?

Lösung: Um das auszurechnen setzen wir die Transportgleichung aus der Vorlesung an. Da es sich in 1D um einen Random Walk handelt (Brownsche Bewegung), können wir die Formel aus der Vorlesung anwenden:

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt$$

Wir nähern: $\langle x \rangle = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{2Dt}$ und setzen die verschiedenen Werte ein. Dabei berüchsichtigen wir, dass $1h = 3600\ s$ und $1d = 86400\ s$. Zur Übersichtlichkeit werden die Ergebnisse hier in einer Tabelle angegeben:

Objekt	Difussionskoeffizient	$\langle x \rangle_{1s}$	$\langle x \rangle_{1h}$	$\langle x \rangle_{1d}$
Glukose	$2,147 \cdot 10^{-10}\ m^2/s$	$2,072 \cdot 10^{-5}$ m	$1,243 \cdot 10^{-3}$ m	$6,091 \cdot 10^{-3}$ m
Protein	$4,295 \cdot 10^{-11}\ m^2/s$	$9,268 \cdot 10^{-6}$ m	$5,561 \cdot 10^{-4}$ m	$2,724 \cdot 10^{-3}$ m
Bakterie	$2,147 \cdot 10^{-13}\ m^2/s$	$6,550 \cdot 10^{-7}$ m	$3,932 \cdot 10^{-5}$ m	$1,926 \cdot 10^{-4}$ m

Tabelle 1: Ergebnistabelle Aufgabe 6b)

(c) Warum haben große Lebewesen (z.B. Menschen) eine Blutzirkulation nötig, Bakterien aber nicht?

Lösung: Weil Bakterien klein genug sind, dass alle Stoffwechseltransporte alleine durch Diffusion ablaufen können, während größere Lebewesen darauf angewiesen sind den Stoffwechseltransport mit einem zusätzlichen Transportprozess aufrechtzuerhalten.

Aufgabe 7 – Gravitation vs. Elektrisches Feld

(a) Ein Elektron wird durch die Coulombkraft eines über ihm befindlichen, ortsfesten Protons gegen das Gravitationsfeld der Erde in der Schwebe gehalten. Unter der völlig unrealistischen Annahme, dass keine anderen geladenen Teilchen in der Nähe sind: wie groß ist der Abstand zwischen Elektron und Proton?

Lösung:

Der Lösungsansatz zu dieser Aufgabe ist der aus E1 bereits bekannte und bewährte Ansatz des Kräftegleichgewichts:

$$F_{Coul} = F_G$$

Wir nehmen an, dass wir uns auf der Erdoberfläche mit unserem Elektron befinden. Da nach der Aufgabenstellung die Position des Elektrons als unveränderlich angenommen wird, können wir $F_G = m \cdot g$ annehmen.

$$-\frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} = m \cdot g$$

Umgestellt

$$r = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot m \cdot g}} \approx 5,1m$$

Wir wir sehen können, reicht die Ladung eines einzelnen Protons aus um das Elektron in einem viel kleineren Abstand zum Proton als zum Erdmittelpunkt zu halten. Die elektrische Feldkraft ist also sehr viel stärker als die Gravitationskraft.

(b) Zwei Protonen befinden sich 10 m von einander entfernt. Berechnen Sie das Verhältnis von Gravitationskraft und elektrischer Kraft, die beide aufeinander ausüben. Was ist stärker?

Lösung: Wir verwenden das Coulombgesetz, um die elektrische Abstoßung zu berechnen:

$$F_C = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Und das Newtonsche Gravitationsgesetz, um die gravitative Anziehung auszurechnen:

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Dann berechnet sich das Verhältnis als:

$$\frac{|F_C|}{|F_G|} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}}{G \cdot \frac{m_p^2}{r^2}} = \frac{1}{4\pi G\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m_p^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}} \cdot \frac{\left(1,602 \cdot 10^{-19}\ C\right)^2}{\left(1,672 \cdot 10^{-27}\ kg\right)^2} \approx 1,236 \cdot 10^{36}$$

(c) Wie schwer müsste jeweils ein Proton sein, damit es sich bei gleichbleibender Ladung mit einem anderen (gleichartigen) Proton bei 10 m Abstand in einem Kräftegleichgewicht zwischen elektrischer Abstoßung und gravitativer Anziehung befände?

Lösung: Wir setzen ein Kräftegleichgewicht an, denn genau, das fordert die Aufgabe:

$$F_G = F_C$$

Ab jetzt setzen wir nur noch ein:

$$G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Und formen um:

$$G \cdot \frac{\tilde{m}_p^2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} \Rightarrow \tilde{m}_p = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi G\epsilon_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1,602 \cdot 10^{-19}\ C)^2}{4\pi \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}}} \approx 1.859 \cdot 10^{-9}\ kg \approx 1.11 \cdot 10^{18} \cdot m_p$$

Das Ergebnis $1.859 \cdot 10^{-9}\ kg$ mag klein wirken, wenn wir uns aber klarmachen, dass dies 10^{18} Protonmassen entspricht, sehen wir, wie groß dieser Massenzuwachs sein müsste.

Aufgabe 8 – Rotationsfreiheit des elektrischen Feldes

Zeigen Sie, warum das Integral

$$\oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dr} = 0$$

aus der Beziehung $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\phi$ folgt. Dabei bezeichnet $\overrightarrow{E}$ das elektrische Feld und ϕ sein elektrostatisches Potential. Was bedeutet das? Warum gilt diese Aussage nur im elektrostatischen Fall?

Hinweise: Sie werden folgende Identitäten brauchen:

- $\overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{\nabla}\phi) = 0$ (Diese Identität wurde mehrfach in T0 bewiesen.)
- $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\phi(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\phi(x, y)$ (Satz von Schwarz)

Lösung:
Nach dem Satz von Stokes gilt:

$$\oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dr} = \int rot\left(\overrightarrow{E}\right) \cdot \overrightarrow{dA}$$

Wir setzen nun $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\phi$ ein und erhalten:

$$\oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dr} = \int rot\left(-\overrightarrow{\nabla}\phi\right) \cdot \overrightarrow{dA} = \int -\overrightarrow{\nabla} \times \left(\overrightarrow{\nabla}\phi\right) \cdot \overrightarrow{dA} = 0$$

Da $\overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{\nabla}\phi) = 0$

Aufgabe 9 – Feld innerhalb eines halbkreisförmigen Halbleiters

Eine Ladung Q ist gleichmäßig verteilt über einen genügend dünnen ringförmigen Draht mit halbkreisförmiger Form (Radius a). Der Drahtring liegt in der x-y-Ebene, sein Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Welche elektrische Feldstärke herrscht im Mittelpunkt des Halbkreises, also am Koordinatenursprung?

Lösung:

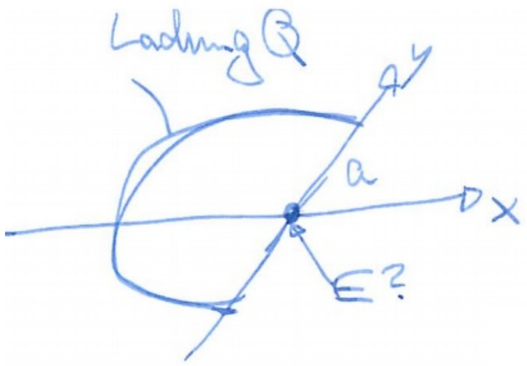


Abbildung 5: Skizze zu Aufgabe 9

Wir berechnen die Feldstärke mithilfe des Coulombgesetzes:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Blöderweise haben wir hier verschiedene r, da die Ladung im Halbkreis um unseren Mittelpunkt verteilt ist. An sich ist E also die Summe aller wirkenden Feldkräfte. $E = \sum E_i$ wobei wir die Summe als Integral approximieren:

$$E = \int E_x \cdot dx = \int \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot dx$$

wobei λ die Menge an Ladung pro Wegelement (Linienladungsdichte) ist.

Als nächstes überlegen wir uns diese Ladungsdichte auf dem Draht:

$$\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{2 \cdot Q}{u} = \frac{Q}{\pi \cdot a}$$

Das Integral kann vereinfacht werden, wenn wir uns die Kreissymmetrie des Problems ausnutzen: $dx = r \cdot \cos(\phi) \cdot d\phi$. Der Halbkreis gibt uns dabei die Integralgrenzen $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ und $r = a$ vor:

$$E = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{Q}{\pi \cdot a} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot a \cdot \cos(\phi) \cdot d\phi = \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(\phi) \cdot d\phi = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{a^2}$$

Aufgabe 10 – Feld einer geladenen Kugel

Diese Aufgabe bringt bis zu 4 Punkte

(a) Leiten Sie aus dem Gaußschen Satz das elektrische Feld einer im inneren homogen geladenen Kugel (unbewegliche Ladungsträger) mit konstanter Ladungsdichte ρ_0 und Radius a ab. Betrachten Sie die Fälle $r < a$ und $r \geq a$ gesondert und skizzieren Sie $E(r)$.

Lösung:

Wir müssen in dieser Aufgabe das Innere und das Äußere der Kugel unterscheiden, weil die Ladung im Inneren mit steigendem r zunimmt, während sie außerhalb der Kugel für jedes r konstant bleibt:

$$Q(r) = \begin{cases} \rho_0 \cdot V_0 = Q_0 = const & f\ddot{u}r\ r > R \\ \frac{Q_0 \cdot r^2}{R^2} = \rho_0 \cdot V_0 \cdot \frac{V(r)}{V_0} & f\ddot{u}r\ r \leq R \end{cases}$$

Unsere Kugel hat dabei ein Volumen $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$; $V_0 = V(r = R)$ und eine Oberfläche $A = 4\pi R^2$

Wir setzen den Satz von Gauß an:

$$E(r) \cdot A = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q(r)}{A\epsilon_0}$$

Dabei haben wir wieder angenommen, dass E ausschließlich von r abhängt und wir daher E aus dem Integral herausziehen dürfen

$$\int EdA = E \int dA = E \cdot A = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Setzen wir hier nun unsere oben bestimmten Q(r) ein, erhalten wir

$$f\ddot{u}r\ r \leq R: \ E(r) \stackrel{(A3)}{=} \frac{\rho_0 \cdot r^3/R^3 \cdot 4/3\pi \cdot R^3}{4\pi r^2 \cdot \epsilon_0} = \frac{\rho_0 \cdot r}{3\epsilon_0} \sim r$$

$$f\ddot{u}r\ r > R: \ E(r) \stackrel{(A3)}{=} \frac{\rho_0 \cdot 4/3\pi \cdot R^3}{4\pi r^2 \cdot \epsilon_0} = \frac{\rho_0 \cdot R^3}{3\epsilon_0 \cdot r^2} \sim \frac{1}{r^2}$$

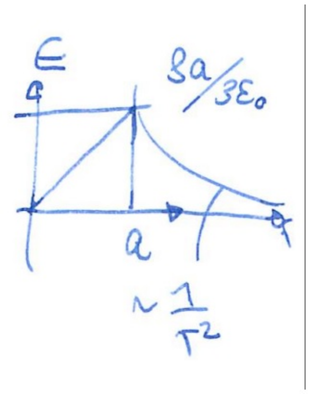


Abbildung 6: Skizze von E(r) einer Kugelladung

(b) Wie groß ist das elektrische Feld auf der Oberfläche der Kugel für den Fall, dass die Elementarladungen in der Kugel mit einer Gitterkonstante von 0.5 nm in einem kubischen Gitter angeordnet sind und die Kugel einen Radius von $a = 1\ \mu m$ hat?

Lösung: Zunächst sollten wir um E(r=R) zu berechnen die Ladungsdichte $\rho_0 = Q/V$ berechnen. Im Falle eines würfelförmigen Gitters ergibt sich das Volumen natürlich trivial als $V = g^3$

$$\rho_0 = \frac{e}{g^3} = \frac{1,602 \cdot 10^{-19} C}{(0,5 \cdot 10^{-9} m)^3} \approx 1,28 \cdot 10^9 \frac{C}{m^3}$$

Nun müssen wir nur noch in unsere Formel aus der Teilafugabe a) einsetzen:

$$E = \frac{\rho \cdot a}{3\epsilon_0} = \frac{1,28 \cdot 10^9 \frac{C}{m^3} \cdot 1 \cdot 10^{-6} m}{3 \cdot 8,854187 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}} \approx 4,8 \cdot 10^{13} \frac{N}{C}$$

Wenn wir noch das elektrische Potential an der Oberfläche ausrechnen wollen, können wir einfach

$$\phi = -\int_{r_0=0}^{a} E(r') \cdot dr' = -\frac{\rho \cdot a^2}{6\epsilon_0} = -2,41 \cdot 10^7 \frac{J}{C}$$

rechnen.

(c) Vergleichen Sie das Feld für $r > a$ mit dem eines Coulombfeldes einer Punktladung.

Lösung: Spannenderweise ist das Feld einer Punktladung identisch mit dem Feld einer Kugelladung, wenn man sich außerhalb der Kugel befindet. Wie also schon in E1, wo wir Massen als Punktamassen auffassen durften, können wir in Zukunft Ladungen, wenn wir uns ausreichend weit entfernt von diesen befinden, als Punktladungen auffassen.

(d) Hätte man das elektrische Feld nicht einfacher aus der Poissongleichung $\Delta\phi = -\rho/\epsilon_0$ erhalten? Rechnen Sie am besten in Kugelkoordinaten, in denen für die radiale Abhängigkeit gilt:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi$$

Lösung: Wir machen das, was uns in der Aufgabenstellung gesagt wurde und schreiben einfach mal die Poissongleichung in Kugelkoordinaten hin:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

1. Wir wir sehen, können wir die Gleichung aufintegrieren. Dabei müssen wir wieder beachten, ob wir uns innerhalb oder außerhalb der Kugel befinden: Bitte beachte, dass wir das Potential so geeicht haben, dass $\phi(0) = 0$
   innerhalb:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi = \int_0^r -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot r'^2 \cdot dr' = \frac{-\rho_0 r^3}{3\epsilon_0}$$

$$\phi = \int_0^r \frac{-\rho_0 r'}{3\epsilon_0} \cdot dr' = \frac{-\rho_0 r^2}{6\epsilon_0}$$

Check:
$$E = -\nabla\phi = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}$$

außerhalb: Hier gilt $\rho = 0$ weil außerhalb der Kugel keinerlei Ladung mehr ist

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\phi = 0$$

$$r^2\frac{\partial}{\partial r}\phi = \int 0 dr' = const$$

Wichtig ist, dass diese Konstante noch unbekannt ist. Sie folgt aus der Stetigkeitsbedingung von $\phi(r = R) = \phi(r = R)$ in beiden Beschreibungen. In dieser Konstante steckt also die Information über weitere Ladungen in der Nähe.

$$\phi = \int_r^\infty \frac{const}{r^2} = -\frac{const}{r}$$

Die Integralgrenzen folgen hier aus der Definition des Potentiales. Wir müssen also nur noch die Konstante bestimmen. Dies gelingt wie oben angedeutet mit der Stetigkeitsbedingung:

$$\phi(r = R) = \phi(r = R)$$

$$\frac{-\rho_0 R^2}{6\epsilon_0} = -\frac{const}{R}$$

$$\Rightarrow const = \frac{-\rho_0 R^3}{6\epsilon_0}$$

$$\phi(r \geq R) = \frac{-\rho_0 R^3}{6\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

2. Dieses Ergebnis deckt sich mit Teilaufgabe b)

(e) Nehmen Sie nun an, dass die Elementarladungen in der Kugel jetzt doch beweglich sind und an die Oberfläche der Kugel getrieben werden. In der Kugel findet sich also keine Ladung mehr, stattdessen ist die gesamte Ladung der Kugel auf der äußersten Kugeloberfläche. Wiederholen sie die Berechnung des elektrischen Feldes für die Fälle $r < a$ und $r \geq a$. Was ändert sich?

Lösung: Innerhalb der Kugel gilt wegen der beweglichen Ladungen Q = 0
Außerhalb gilt:
$$\int E dA = E\int dA = E \cdot A = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Also gilt:
$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Aus b) $\sigma = \frac{Q}{A} = 4,3 \cdot 10^2 \frac{C}{m^2}$. Und so ergibt sich:

$$E = 4,8 \cdot 10^{13} N/C$$

Wir können von außern also nicht entscheiden, wie die Ladungsverteilung innerhalb unserer Kugel ist. Von außen sieht die homogengeladene Kugel gleich aus, wie eine Kugel mit der gleichen Ladung ausschließlich auf der Oberfläche.
