Übungsblatt Elektrodynamik 4 - Musterlösung

Besprechung in der Woche vom 25.06.18 bis 29.06.18

Teil A: Verständnisaufgaben

Aufgabe 1 – Elektrische Leistung

Eine Potenzialdifferenz U wird an ein Bauelement mit dem ohmschen Widerstand R angelegt und erzeugt einen Strom I durch das Bauelement. Ordnen Sie die folgenden Änderungen der Bestimmungsgrößen I, U und R entsprechend der jeweiligen zeitlichen Rate, mit der elektrischen Energie am Widerstand R in Wärmeenergie umgesetzt wird:

a) U wird verdoppelt, R bleibt unverändert. c) R wird verdoppelt, U bleibt unverändert.

b) I wird verdoppelt, R bleibt unverändert. c) R wird verdoppelt, I bleibt unverändert.

Lösung: Gesucht ist die (Wärme-)Leistung, die am Widerstand umgesetzt wird:

$$P = UI.$$

Da bei a) – b) immer der Widerstand R, aber wechselnd Spannung U bzw. Strom I angegeben sind, müssen sie durch die jeweils anderen beiden Größen ausgedrückt werden. Dazu dient der Zusammenhang $U = RI$ bzw. $I = \frac{U}{R}$ und somit gilt:

$$P = RI^2 = \frac{U^2}{R}.$$

Damit folgt:

a) U wird verdoppelt, R bleibt unverändert $\Rightarrow$ P wird vervierfacht.

b) I wird verdoppelt, R bleibt unverändert $\Rightarrow$ P wird vervierfacht.

c) R wird verdoppelt, U bleibt unverändert $\Rightarrow$ P wird halbiert.

d) R wird verdoppelt, I bleibt unverändert $\Rightarrow$ P wird verdoppelt.

Damit ist die Reihenfolge: $P_a = P_b > P_d > P_c$.

Aufgabe 2 – Driftgeschwindigkeit

In der Vorlesung wurde die Beziehung $\vec{j} = nq\vec{v_D}$ zwischen Stromdichte und Driftgeschwindigkeit von Ladungsträgern eingeführt. Wie groß ist die Driftgeschwindigkeit der leitenden Elektronen in einem Kupferdraht mit einem Durchmesser $d = 1\,\mathrm{mm}$, wenn ein Strom $I = 2\,\mathrm{A}$ fließt? Nehmen Sie an, dass pro Kupferatom ein Leitungselektron vorliegt.

Lösung: Zunächst benötigen wir die Ladungsträgerdichte n. Dazu verwenden wir die Dichte $\rho = 8900\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ und die molare Masse $M = 63.5\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$:

$$n = \frac{\rho N_A}{M} = 8.4 \times 10^{28}\,\mathrm{m^{-3}}.$$

Es gilt:

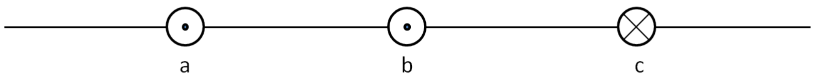
$$I = jA = neAv_D = ne\pi r^2 v_D.$$

Und damit:

$$v_D = \frac{I}{ne\pi r^2} = 1.89 \cdot 10^{-4}\ \frac{m}{s} = 189\ \frac{\mu m}{s}$$

Aufgabe 3 – Kraft zwischen stromdurchflossenen Leitern

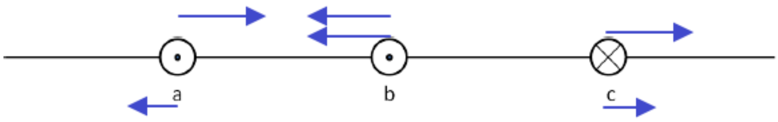
Die Abbildung zeigt drei lange, gerade, parallele und äquidistante Drähte, in denen identische Ströme entweder in die Papierebene hinein (c) oder aus ihr heraus (a und b) fließen. Ordnen Sie die Drähte nach dem Betrag der Kraft auf sie aufgrund der Ströme in den anderen beiden Drähten (größte zuerst).



Lösung: Die Kraft zwischen zwei Leitern ist durch die folgende Formel gegeben (l ist die gemeinsame Länge der Drähte und r der Abstand):

$$F = l\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{r}.$$

Durch zweimaliges Anwenden der Drei-Finger-Regel (man muss sich als Erstes die Richtung der Magnetfelder, verursacht durch die jeweils anderen Drähte, überlegen und dann die resultierende Kraftrichtung) findet man heraus, dass die Kraft zwischen zwei Leitern mit der selben Flussrichtung anziehend und zwischen zwei unterschiedlichen Stromrichtungen abstoßend ist.



Wir wählen d als Abstand jeweils zwischen Leiter a, b und b, c. Damit ergeben sich die Kräfte (eine Kraft nach links sei positiv):
Auf Leiter a:

$$|F| = \left| -l\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{d} + l\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{2d} \right| = l\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{2d} = \frac{1}{2}l\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{d} =: \frac{1}{2}F_0.$$

Auf Leiter b:

$$|F| = \left| l\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{d} + l\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{d} \right| = 2l\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{d} = 2F_0.$$

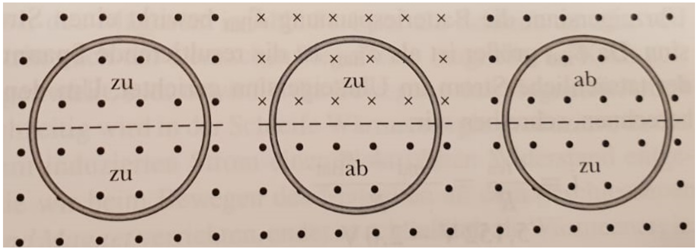
Auf Leiter c:

$$|F| = \left| -l\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{d} - l\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{2d} \right| = 2l\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{d} = \frac{3}{2}F_0$$

Damit ist die Reihenfolge von der betragsmäßig größten zur kleinsten Kraft b, c, a.

Aufgabe 4 – Induktion

Die Abbildung zeigt drei identische kreisförmige Leiterschleifen in Magnetfeldern, deren Feldstärke mit identischen Geschwindigkeiten entweder zu- oder abnehmen. Punkte bzw. Kreuze zeigen entgegengesetzte Richtungen des Magnetfelds an (in die Papierebene hinein bzw, aus ihr heraus). Die gestrichelte Linie teilt die Schleifen jeweils in zwei gleich große Hälften. Ordnen Sie die drei Schleifen nach dem in ihnen induzierten Strom (größte zuerst).



Lösung: Hier handelt es sich um einen Fall elektromagentischer Induktion. Die dienliche Formel ist also

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

mit

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = B \cdot A$$

Da die Fläche hier konstant bleibt ($\frac{dA}{dt} = 0$), gilt:

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -A \cdot \dot{B}$$

Die Wahl des Vorzeichens von A und B hängt von der Orientierung des Magnetfelds zur gewählten (!) Flächennormale ab. Prinzipiell ist diese egal solange man auf Konsistenz achte. Sei $\dot{B}_0$ die Änderung des zunehmenden Magnetfeldes. Wir wählen, dass B aus dem Blatt hinaus schaut, und ebenso der Normalenvektor der Fläche $\overrightarrow{A}$. Dann ergibt sich:

+	a) oben	a) unten	b) oben	b) unten	c) oben	c) unten
$\dot{B}$	$+\dot{B}_0$	$+\dot{B}_0$	$+\dot{B}_0$	$-\dot{B}_0$	$-\dot{B}_0$	$+\dot{B}_0$
Orientierung	+A/2	+A/2	-A/2	+A/2	+A/2	+A/2
$U_{ind} = -\dot{\Phi}$	$-A\dot{B}_0$		$A\dot{B}_0$		0	

Somit erhält man für den Betrag der Induktion folgende Reihenfolge:

$$a) = b) > c).$$

Anmerkung: Wenn die Rechnung richtig gemacht wurde und man nicht den Betrag genommen hat, d.h. $a) > c) > b)$, gibt es ebenfalls die volle Punktzahl.

Teil B: Rechenaufgaben

Aufgabe 5 – Kondensatorknall.

In der Vorlesung hatten wir einen Hochspannungskondensator (mit Kapazität von $C = 1\,\mu\mathrm{F}$) auf $V = 1{,}5\,\mathrm{kV}$ aufgeladen. Der Kondensator wird nun von der Spannungsquelle getrennt.

a) Wie groß ist die im Kondensator gespeicherte Ladung?

Lösung: $Q = CU = 1,5\,\mathrm{mC}$.

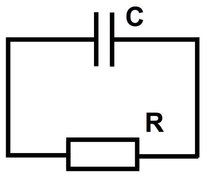
---

b) Wie groß ist die im Kondensator gespeicherte Energie?

Lösung: $E = \frac{1}{2}CU^2 = 1,125\,\mathrm{J}$.

---

c) Nun wird der Kondensator über zwei Drähte und eine Kupferplatte kurzgeschlossen. Die Drähte und Kupferplatte sollen zusammen einen Widerstand von $R = 10\,\Omega$ haben. Der Schaltkreis für den kurzgeschlossenen Kondensator ist in der Skizze unten gezeigt. Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Ladung im Kondensator als Funktion der Zeit nach dem Kurzschluss auf. *Hinweis: Nutzen Sie Kirchhoffs Maschenregel, sowie die Definitionen von Strom und Kapazität.*



Lösung: Aus der Maschenregel folgt direkt:

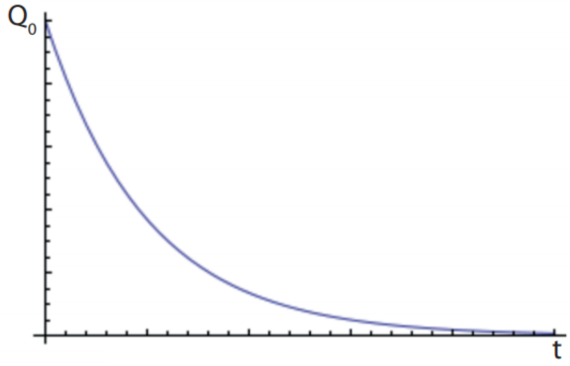
$$0 = U_R + U_C = IR + \frac{Q}{C} = \dot{Q}R + \frac{Q}{C} \quad \Longrightarrow \quad \dot{Q} + \frac{Q}{RC} = 0.$$

---

d) Geben Sie eine Lösung der in der letzten Teilaufgabe aufgestellten Differentialgleichung an. Zeichnen Sie den zeitlichen Verlauf der Ladung auf dem Kondensator.

Lösung: Wir lösen die DGL per Separation:

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{dt} &= -\frac{Q}{RC} \\
\Longrightarrow \quad \frac{dQ}{Q} &= -\frac{dt}{RC} \\
\Longrightarrow \quad \int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{dQ'}{Q'} &= -\int_0^t \frac{dt'}{RC} \\
\Longrightarrow \quad \ln\left(\frac{Q(t)}{Q_0}\right) &= \frac{-t}{RC} \\
\Longrightarrow \quad Q(t) &= Q_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}.
\end{aligned}$$



e) Was ist die charakteristische Zeitkonstante τ der Entladung? Wenn wir näherungsweise davon ausgehen, dass der Kondensator in etwa in der Zeit τ entladen wird und dabei seine gesamte Energie abgibt, was ist die freigesetzte Leistung?

Lösung: Es gilt:

$$Q(t) = Q_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = Q_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \quad \Longrightarrow \quad \tau = RC = 10\,\mu\mathrm{s}.$$

Somir erhalten wir für die Leistung:

$$P = \frac{E}{\tau} = 112.5\,\mathrm{kW}.$$

Aufgabe 6 – Spezifischer Widerstand

a) Den Kehrwert der Leitfähigkeit bezeichnet man als spezifischen Widerstand ρ. Der spezifische Widerstand von Kupfer bei 20 °C beträgt $\rho_{20} = 1.7 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$. Berechnen Sie den Widerstand eines 10 m langen Kupferdrahtes mit Durchmesser 2 mm bei 20 °C.

Lösung:

$$R = \frac{\rho l}{A} = 54.11\,\mathrm{m\Omega}$$

---

b) Die Änderung des Widerstandes mit der Temperatur kann bei vielen Leitern als linear genähert werden. Dabei wird meistens der spezifische Widerstand und der Temperaturkoeffizient α angegeben, so dass gilt: $\rho(t) = \rho_{20}[1 + \alpha(t - 20\,^\circ\mathrm{C})]$. Bei Kupfer ist $\alpha = 3.9 \times 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$. Finden Sie die Temperaturen bei welchen sich der Widerstand um 10% erhöht bzw. gesenkt hat.

Lösung:

$$\begin{aligned}
x_1 = 90\%,\ x_2 = 110\% \\
\rho(t_{x_i}) = x_i \rho_{20} \\
1 + \alpha(t_{x_i} - 20\,^\circ\mathrm{C}) = x_i \\
t_{x_i} = \frac{(x_i - 1)}{\alpha} + 20\,^\circ\mathrm{C} \\
t_{x_1} = 45.6\,^\circ\mathrm{C}, t_{x_2} = -5.6\,^\circ\mathrm{C}
\end{aligned}$$

---

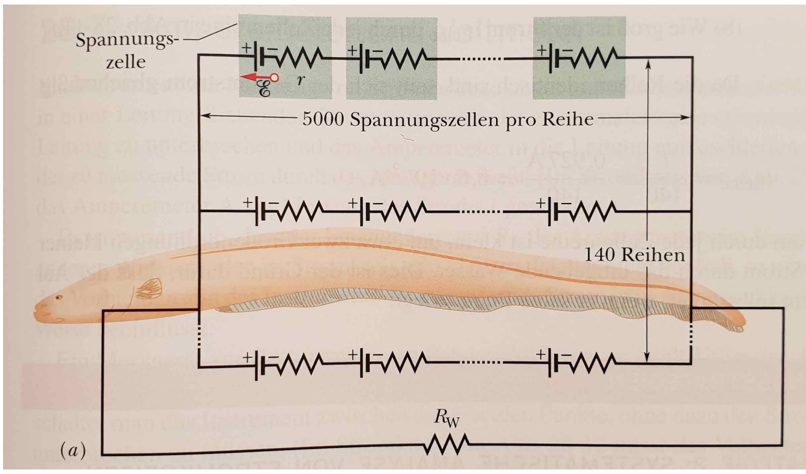
c) Ein 1 m langer Draht habe einen Widerstand von $0.1\,\Omega$. Auf welche Länge muss der Draht gleichmäßig gedehnt werden um einen Widerstand von $10\,\Omega$ bzw. $1000\,\Omega$ aufzuweisen? (Tipp: Beim gleichmäßigen Dehnen bleibt das Volumen konstant.)

Lösung:

$$\begin{aligned}
lA = l'A' = V = c \\
A' = \frac{lA}{l'} \\
R' = \frac{\rho l'}{A'} = \frac{\rho l'^2}{lA} = \frac{\rho l}{A}\frac{l'^2}{l^2} = R\frac{l'^2}{l^2} \\
l' = \sqrt{\frac{R'}{R}}\,l \\
l'(R' = 10\,\Omega) = 10\,\mathrm{m} \\
l'(R' = 1000\,\Omega) = 100\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 – Zitteraal

Bestimmte Fischarten sind in der Lage, einen elektrischen Strom im umgebenden Wasser zu erzeugen. Sie verfügen dazu über eine Zellenart, die man als physiologische Spannungsquellen betrachten kann. Diese Zellen sind im Körper des südamerikanischen Zitteraals in 140 Reihen zu je ca. 5000 Zellen längs des Körpers des Tiers angeordnet. Die Abbildung zeigt ein Schaltbild des Aals. Jede Zelle erzeugt eine Spannung U von 0,15 V und hat einen Innenwiderstand R von 0,25 Ω. Das den Aal umgebende Wasser schließt den Stromkreis zwischen den beiden Enden der Zellenreihen, zwischen dem Kopf und dem Schwanzende des Tiers.



a) Nehmen Sie den Widerstand des Wassers zwischen Kopf und Schwanzende des Aals zu $R_W = 800\,\Omega$ an und berechnen Sie den maximalen Strom, den das Tier im Wasser erzeugen kann. *Hinweis:* Vereinfachen Sie das Schaltbild des elektrischen Organs des Aals, in dem Sie die Reihen von Zellen durch äquivalente Spannungen und Widerstände zusammenfassen.

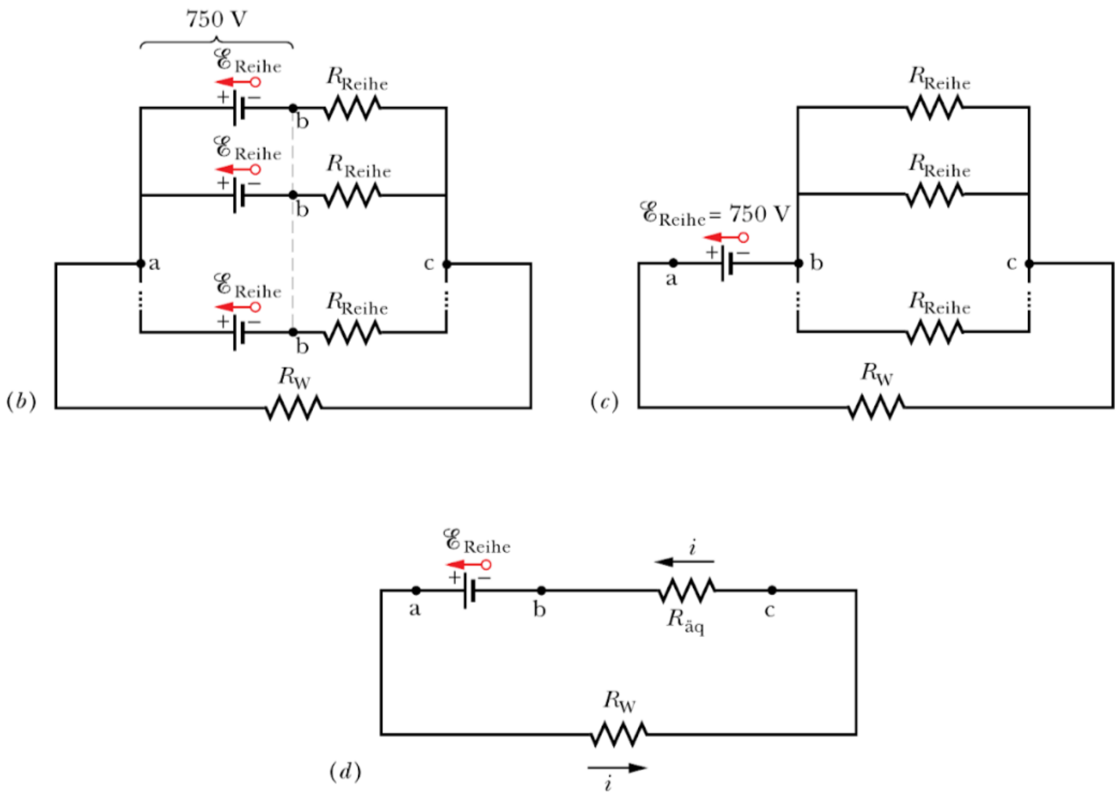
Lösung: Betrachten wir zunächst eine einzelne Reihe. Die Gesamtspannung U_{Reihe} über eine Reihe von 5000 Zellen ist die Summe der Einzelspannungen:

$$U_{\text{Reihe}} = 5000 \cdot U = 5000 \cdot 0,15\,\text{V} = 750\,\text{V}. \tag{1}$$

Der gesamte Innenwiderstand R_{Reihe} einer Reihe ergibt sich als Summe der Innenwiderstände von 5000 Zellen:

$$R_{\text{Reihe}} = 5000 \cdot R = 5000 \cdot 0,25\,\Omega = 1250\,\Omega. \tag{2}$$

Nun können wir wie in Abb. (b) unten dargestellt jeder der 140 identischen Reihen eine Gesamtspannung U_{Reihe} sowie einen gesamten Innenwiderstand R_{Reihe} zuordnen.



Die Spannung zwischen den Punkten a und b innerhalb jeder Reihe (Abb. (b)) beträgt $U_{\text{Reihe}} = 750\,\text{V}$. Da alle Reihen identisch und am linken Ende miteinander verbunden sind, befinden sich alle Punkte b auf demselben elektrischen Potenzial. Wir können sie deshalb als leitend miteinander verbunden und alle Punkte b in einem einzigen Punkt b vereinigt denken. Die Spannung zwischen dem Punkt a und diesem einzelnen Punkt b beträgt $U_{\text{Reihe}} = 750\,\text{V}$ (Abb. (c)).

Zwischen den Punkten b und c in Abb. (c) sind 140 Widerstände $R_{\text{Reihe}} = 1250\,\Omega$ parallel geschaltet. Der äquivalente Widerstand $R_{\text{äq}}$ dieser Parallelschaltung ist gegeben durch:

$$\frac{1}{R_{\text{äq}}} = \sum_{j=1}^{140} \frac{1}{R_j} = 140 \cdot \frac{1}{R_{\text{Reihe}}} \tag{3}$$

oder

$$R_{\text{äq}} = \frac{R_{\text{Reihe}}}{140} = \frac{1250\,\Omega}{140} = 8,93\,\Omega. \tag{4}$$

Ersetzen wir noch die Parallelschaltung durch diesen äquivalenten Widerstand $R_{\text{äq}}$, so werden wir schließlich zu dem in Abb. (d) dargestellten, vereinfachten Stromkreis geführt. Die Anwendung der Maschenregel auf diesen Kreis, im Gegenuhrzeigersinn und beginnend im Punkt b, ergibt:

$$U_{\text{Reihe}} - I \cdot R_W - I \cdot R_{\text{äq}} = 0, \tag{5}$$

Löst man nach I auf und setzt die gegebenen Werte ein, so erhält man:

$$I = \frac{U_{\text{Reihe}}}{R_{\text{W}} + R_{\text{äq}}} = \frac{750\,\text{V}}{800\,\Omega + 8,93\,\Omega} = 0,927\,\text{A} \approx 0,93\,\text{A}. \tag{6}$$

Befindet sich ein Fisch im Wasser zwischen Kopf und Schwanzende des Aals, so kann ein Teil dieses Stroms durch den Körper der Beute fließen und diese töten oder lähmen.

---

b) Wie groß ist der Strom I_{Reihe} durch jede Zellenreihe in der Abbildung?

Lösung: Da die Reihen identisch sind, teilt sich der Gesamtstrom gleichmäßig auf:

$$I_{\text{Reihe}} = \frac{I}{140} = \frac{0,927\,\text{A}}{140} \approx 6,6 \cdot 10^{-3}\text{A} = 6,6\,\text{mA}. \tag{7}$$

Der Strom durch jede Zellenreihe ist klein, um etwa zwei Größenordnungen kleiner als der Strom durch das umgebende Wasser. Dies ist der Grund dafür, dass der Aal sich nicht selbst tötet, wenn er seine Beute erlegt.

Aufgabe 8 – Orientierungspolarisation

In einem Lösungsmittel der Viskosität η sind Moleküle mit einem Dipolmoment p in einer Anzahldichte n. Legt man nun ein externes elektrisches Feld vom Betrag E an, richten sich die Dipole entlang des elektrischen Feldes aus, jedoch wirkt ihre thermische Bewegung dieser entgegen. Zur Vereinfachung nehme man im folgenden an, dass sich die Moleküle stets im thermischen Gleichgewicht befinden und nur drei Einstellrichtungen haben: In Feldrichtung, entgegengesetzt und senkrecht dazu.

a) Wie sieht die Richtungsverteilung der Dipole **mit und ohne** elektrisches Feld aus? Berechnen Sie dazu $\bar{n}_+ := n_{Feldrichtung}, \bar{n}_- := n_{gegen\ Feldrichtung}$ und $\bar{n}_\perp$ für die beiden Fälle. *Hinweis: Boltzmannverteilung; Achten sie genau auf die Multiplizitäten*

Lösung: Jede Dimension liefert zwei Richtungen (vor und zurück), somit ergeben sich insgesamt sechs Richtungen. Die erste Richtung liegt parallel zum elektrischen Feld ($E_+ = pE$), die zweite entgegengesetzt ($E_- = -pE$) und die anderen vier senkrecht ($E_\perp = 0$), wobei E_i die potentielle Energie eines Dipols und E die Stärke des elektrischen Feldes bezeichnen.

Daraus ergibt sich für die Multiplizitäten:

$$g_+ = 1$$
$$g_- = 1$$
$$g_\perp = 4$$

Gesucht ist nun die statistische Verteilung auf diese drei Einstellungen, welche, wie im Hinweis angegeben, die Boltzmannverteilung ist.

Dazu stellen wir zunächst die Boltzmannwahrscheinlichkeiten auf, da die Dichte von Zuständen n_i gleich der Gesamtteilchendichte multipliziert mit der Boltzmannwahrscheinlichkeit $P_{B,i}$ ist:

$$n_i = n \cdot P_{B,i}$$

Für die Boltzmannwahrscheinlichkeit gilt, wie aus der Thermodynamik bekannt:

$$P_{B,i} = \frac{g_i \cdot e^{-\frac{E_i}{kT}}}{Z}$$

wobei Z die Zustandssumme und g_i die Multiplizität des Zustands i kennzeichnet. Die Zustandssumme in dieser Rechnung ist:

$$Z = \sum_{i\in[+,-,\perp]} g_i \cdot e^{-\frac{E_i}{kT}} = g_+ \cdot e^{-\frac{E_+}{kT}} + g_- \cdot e^{-\frac{E_-}{kT}} + g_\perp \cdot e^{-\frac{E_\perp}{kT}}$$

Da orthogonal zu einem elektrischen Feld ein Dipol keine potentielle Energie erhält, gilt:

$$E_\perp = 0$$

Für die Energien parallel und antiparallel zum E-Feld gilt:

$$E_+ = -p \cdot E$$

$$E_- = -p \cdot -E = p \cdot E$$

Damit ergibt sich für die Zustandssumme:

$$Z = g_+ \cdot e^{-\frac{-pE}{kT}} + g_- \cdot e^{-\frac{pE}{kT}} + g_\perp \cdot e^{-\frac{0}{kT}} = 1 \cdot e^{\frac{pE}{kT}} + 1 \cdot e^{-\frac{pE}{kT}} + 4$$

Da unser Polarisationsexperiment bei Raumtemperatu stattfindet, können wir die Exponentialfunktion Taylor entwickeln: $\exp(\pm\frac{pE}{k_B T}) \approx 1 \pm pE/(k_B T)^{-1}$. Das nennt man Hochtemperaturnäherung.

So ergibt sich ganz einfach:

$$Z = 1 + 1 + 4 = 6$$

Ohne elektrisches Feld:

Mit $E = 0$ ergibt sich, unter Beibehaltung der Vorzugsrichtung des anfangs als nicht vorhanden angenommenen elektrischen Feldes, die stat. Verteilung der Richtung rein aus den Multiplizitäten g_i:

$$n_+ = n \cdot P_{B,+} = n \cdot \frac{g_+ \cdot e^{\frac{pE}{kT}}}{Z} = \frac{n \cdot e^{\frac{0}{kT}}}{6} = \frac{n}{6}$$

$$n_- = n \cdot P_{B,-} = n \cdot \frac{g_- \cdot e^{-\frac{pE}{kT}}}{Z} = \frac{n \cdot e^{\frac{0}{kT}}}{6} = \frac{n}{6}$$

$$n_\perp = n \cdot P_{B,\perp} = n \cdot \frac{g_\perp \cdot e^{\frac{0}{kT}}}{Z} = \frac{4 \cdot n \cdot 1}{6} = \frac{2n}{3}$$

Mit elektrischem Feld:

Wir setzen nun $E > 0$ ein und erhalten:

$$n_+ = n \cdot P_{B,+} = n \cdot \frac{g_+ \cdot e^{\frac{pE}{kT}}}{Z} = \frac{n}{6} e^{\frac{pE}{kT}} = \frac{n}{6}\left(1 + \frac{pE}{kBT}\right)$$

$$n_- = n \cdot P_{B,-} = n \cdot \frac{g_- \cdot e^{-\frac{pE}{kT}}}{Z} = \frac{n}{6} e^{-\frac{pE}{kT}} = \frac{n}{6}\left(1 - \frac{pE}{kBT}\right)$$

$$n_\perp = n \cdot P_{B,\perp} = n \cdot \frac{g_\perp \cdot e^{\frac{0}{kT}}}{Z} = \frac{2n}{3}$$

Anmerkung: Die Aussage bei der c), dass man getrost mit $pE << k_B T$ rechnen kann, sollte bereits bei der a) fallen. Es gab daher auch die volle Punktzahl, wenn man die Exponentialfunktionen nicht Taylor entwickelt hat.

---

b) Wie stark müsste das elektrische Feld sein, damit die Dipolenergie gleich der thermische Energie wäre? Nehmen Sie dazu an, dass es sich beim Lösungsmittel um Wasser handelt, d.h. $p = 1,85\,\mathrm{D}$ (D = Debye = $3{,}3 \cdot 10^{-30}$ C·m).

Lösung: Wir setzen die beiden Energien gleich und erhalten nach Einsetzen der angegebenen Werte (+ Raumtemperatur 300 K):

$$E = \frac{k_B T}{p} = 6,8 \cdot 10^8 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}.$$

Wir sehen hier, nochmal nachträglich, dass eine Hochtemperaturnäherung angemessen ist, denn wie in Teilaufgabe (c) gesagt wird, sind elektrische Felder meist im Bereich $E = 10^4$ N/C.

---

c) Für ein typisches homogenes Feld im Kondensator gilt $E = 10^4\,\mathrm{N/C}$, sodass Sie im Folgenden getrost mit $pE \ll k_B T$ rechnen können. Welcher mittleren Gesamtpolarisation in Richtung des elektrischen Feldes $\bar{P}_+$ würden die in a) berechneten Verteilungen entsprechen?

Lösung: Wieder machen wir eine Taylorentwicklung der Exponentialfunktionen.

$$e^x = 1 + x + O(x^2)$$

Damit ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
\bar{n}_+ &= \frac{n}{6}\mathrm{e}^{+\frac{pE}{k_B T}} = \frac{n}{6}\left(1 + \frac{pE}{k_B T}\right),\\
\bar{n}_- &= \frac{n}{6}\mathrm{e}^{-\frac{pE}{k_B T}} = \frac{n}{6}\left(1 - \frac{pE}{k_B T}\right),\\
\bar{n}_\perp &= \frac{2n}{3}.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für die Gesamtpolarisation in Richtung des elektrischen Feldes:

$$\bar{P}_+ = \sum_{i\in +,-,\perp} n_i p_{+,i} = n_+ p - n_- p + 0 = \frac{1}{3}\frac{np^2}{k_B T}E,$$

wobei $p_{+,i} = \vec{p}_i \cdot \hat{e}_+$ mit $\hat{e}_+$ dem Einheitsvektor in Richtung des Feldes. Für den Fall $E = 0$ erhalten wir $\bar{P}_{+,i} = 0$, was der Intuition entspricht.

---

d) Statt den soeben ausgerechneten Bruchteil ganz in Feldrichtung zu drehen, kann man mit dem gleichen Polarisationserfolg auch alle Dipole um den gleichen, kleinen Winkel γ drehen. Wie lange dauert eine solche Drehung in Wasser? (Molekülvolumen in Wasser $V = 3 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{m}^3$; Viskosität von Wasser $\eta = 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$.)

Hinweis: Rechnen Sie dazu zunächst γ aus. Dann nehmen sie als Ansatz für die Zeit $\tau = \gamma\eta V (pE)^{-1}$. Es gibt einen Bonuspunkt für das Herleiten des gegebenen Ansatzes.

Lösung: Zur Bestimmung des Winkels γ nutzen wir, dass die entsprechende Rotation zur gleichen Polarisation führt:

$$\bar{P}_+^\gamma = np_+^\gamma = np\sin(\gamma) \approx np\gamma \overset{!}{=} \frac{np^2 E}{3k_B T} \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma = \frac{pE}{3k_B T}.$$

Um die Zeit, die eine solche Rotation braucht, auszurechnen, nutzen wir den im Hinweis angegeben Ansatz und erhalten:

$$\tau = \frac{\gamma\eta V}{pE} = \frac{\eta V}{3k_B T} = 2,65 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{s},$$

was einer sehr kurzen Zeitspanne entspricht.

Bonus: Auf einen Dipol wirken das externe elektrische Feld und sobald er sich bewegt auch Reibungskräfte. Um den Ansatz für die Rotationszeit herzuleiten, nehmen wir an, dass ein Wassermolekül von der Form ungefähr einer Hantel mit Länge a und Radius der Kugeln r entspricht und dass, da die die meisten Dipole beim Anlegen des Felds senkrecht zu diesem stehen, $D = pE$, wobei D das Drehmoment auf den Dipol bezeichnet. Außerdem können wir aufgrund der stärke der elektrischen Kraft annehmen, dass das Molekül quasi instantan auf seine asymptotische Geschwindigkeit beschleunigt wird.

Wir können somit das Rotationsanalogon eines lineares Weg-Zeit Gesetzes hernehmen:

$$\gamma = \omega\tau \quad \Longrightarrow \quad \tau = \frac{\gamma}{\omega},$$

wobei die Winkelgeschwindigkeit die Asymptotische Geschwindigkeit ist, bei der keine Beschleunigung mehr möglich ist aufgrund der Reibung:

$$D \stackrel{!}{=} 2aF_R = a12\pi\eta r v = 12\pi\eta r a^2\omega \approx \eta V\omega,$$

wobei wir $v = a\omega$ für jede Kugel benutzt haben. Oben eingesetzt erhalten wir

$$\tau = \frac{\gamma}{\omega} = \frac{\gamma\eta V}{D} = \frac{\gamma\eta V}{pE}.$$

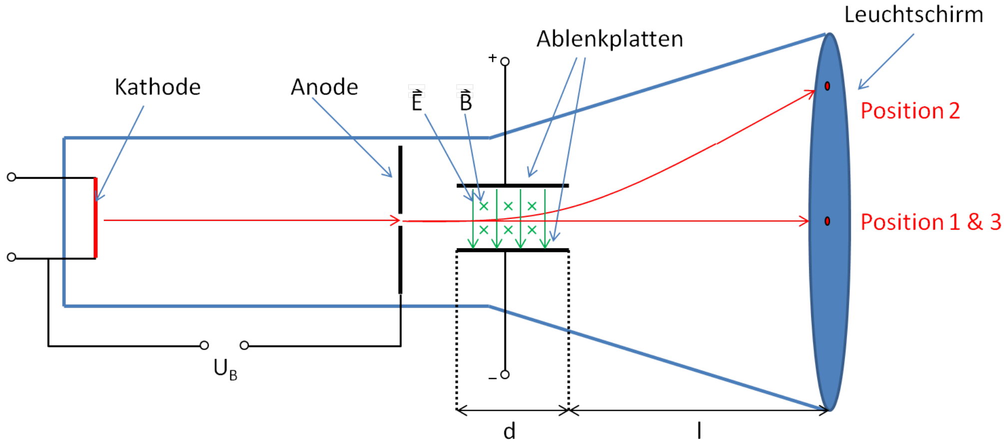
---

e) Wie bewerten Sie die Vorstellung, dass eine langfristige ,,Ordnung von Wassermolekülen" auch nach großer Verdünnung eine pharmazeutische Wirkung entfaltet?

Lösung: Mit dem soeben ausgerechneten Ergebnis ist eine langfristige Ordnung von Wassermolekülen nicht durch ein elektrisches Feld zu erreichen, da die Moleküle sich nach Abschalten des elektrischen Feldes praktisch instantan wieder ,,entordnen".

Aufgabe 9 – Die Entdeckung des Elektrons

Im Jahre 1897 deutete der Cambridge Professor J.J. Thomson die bis dahin unbekannten Strahlen, die aus einer Glühkathode austreten und entdeckte somit, dass es kleinere Teilchen als Atome gibt. Die Abbildung zeigt eine moderne, auf das Wesentliche reduzierte Version von Thomsons Anordnung aus dem Jahre 1897: eine Kathodenstrahlröhre (déjà vu! ED 2, Aufgabe 6) mit einem zusätzlichen zum E-Feld senkrecht stehenden B-Feld. Thomson ging wie folgt vor:



1. Er wählte zunächst E = 0 und B = 0 und markierte die Position des Lichtflecks, den der nicht abgelenkte Elektronenstrahl auf dem Leuchtschirm erzeugte.

2. Als nächstes stellte er einen von 0 verschiedenen Wert des elektrischen Feldes E ein und maß die sich ergebende Ablenkung des Lichtflecks. Was kann man an dieser Stelle bereits über die Ladung der Strahlung sagen?

3. Nun regelte er die Stärke des Magnetfeldes so, dass der Lichtfleck zu seiner ursprünglichen Position zurückkehrte. In welche Richtung muss das Magnetfeld zeigen, damit sich die Kräfte aufheben können?

Thomsons Kathodenstrahlröhre nutzte Kondensatorplatten mit einer Länge von 5 cm und einem Abstand von 110 cm zum Leuchtschirm. Er nutzte ein elektrisches Feld der Stärke $E = 1,5 \cdot 10^4\,\mathrm{V/m}$ und maß eine resultierende Auslenkung von $y(t_l) = 8\,\mathrm{cm}$, woraufhin er ein Magnetfeld der Stärke $5,5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$ zum ausgleichen einstellte.

a) In welche Richtung muss das Magnetfeld zeigen um das elektrische Feld auszugleichen?

Lösung: Das elektrische Feld zeigt nach unten, also werden die Elektronen genau entgegengesetzt nach oben abgelenkt. Die durch das Magnetfeld erzeugte Kraft muss also nach unten wirken, um die elektrische Kraft auszugleichen. Mit der Drei-Finger-Regel (Daumen entgegen der Elektronenbewegung, also nach links; Zeigefinger in Richtung der gewünschten magnet. Kraft nach unten) ergibt sich ein magnetisches Feld in die Zeichenebene hinein, was durch Kreuze gekennzeichnet wird.

In anderen Worten muss man lediglich beachten, dass Elektronen eine negative Ladung haben, d.h. $F = qv \times B = -ev \times B$, sodass das richtige magnetische Feld, dem magnetischen Feld, welches man aus der üblichen Drei-Finger-Regel (rechte Hand) erhält, entgegen gerichtet ist.

---

b) Leiten Sie einen Ausdruck für m/q her und geben Sie dessen Wert laut Thomsons Versuch an. Vergleichen Sie diesen außerdem mit dem heutigen akzeptierten Wert. *Hinweis: Nutzen Sie ihr Ergebnis aus dem Übungsblatt ED 2, Aufgabe 6.*

Lösung: Im nicht abgelenkten Strahl sind elektrische und magnetische Kraft gleich groß. Man setzt diese also gleich:

$$\begin{aligned} F_{el} &= F_{mag} \\ \implies |q|E &= |q|vB\sin(90°) = |q|vB \\ \implies E &= vB \\ \implies E^2 &= v^2B^2. \end{aligned}$$

Nun kann man folgende Formel für die Ablenkung zwischen zwei Kondensatorplatten verwenden, die bereits auf Blatt ED 2, Aufgabe 6 hergeleitet wurde:

$$y = \frac{Eqd^2}{2mv_x^2} + \frac{Eqdl}{mv_x^2} = \frac{Eqd}{mv_x^2} \cdot \left(\frac{d}{2} + l\right).$$

Diese stellt man nach v^2 um und setzt in die Gleichung oben ein:

$$v_x^2 = \frac{Eqd}{my} \cdot \left(\frac{d}{2} + l\right).$$

Nun setzt man ein und stellt nach $\frac{m}{q}$ um:

$$E^2 = \frac{Eqd}{my}B^2 \cdot \left(\frac{d}{2} + l\right)$$

$$\frac{m}{q} = \frac{d \cdot B^2}{E \cdot y} \cdot \left(\frac{d}{2} + l\right)$$

Schließlich kann man die Werte aus der Aufgabenstellung einsetzen:

$$\frac{m}{q} = \frac{0,05\ \mathrm{m} \cdot (5,5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{T})^2}{1,5 \cdot 10^4\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot 0,08\ \mathrm{m}} \cdot \left(\frac{0,05\ \mathrm{m}}{2} + 1,10\ \mathrm{m}\right) \approx 1,4 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{C}}$$

Der Literaturwert für die Größe $\frac{m}{q}$ liegt heute bei $5,69 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{C}}$, was leicht von Thomson Ergebnis abweicht. Dieses Ergebnis war aber für die damalige Zeit eine große Leistung.

Thomson vermutete, dass die entdeckten Teilchen in jeder Art von Materie vorkämen und dass sie um einen Faktor von mehr als 1000 leichter seien als das leichteste bekannte Atom, das Wasserstoffatom. Thomsons Messung des Verhältnisses m/q, sowie die Treffsicherheit seiner beiden Vermutungen führten dazu, dass man ihm später die ,,Entdeckung des Elektrons” zuschrieb.

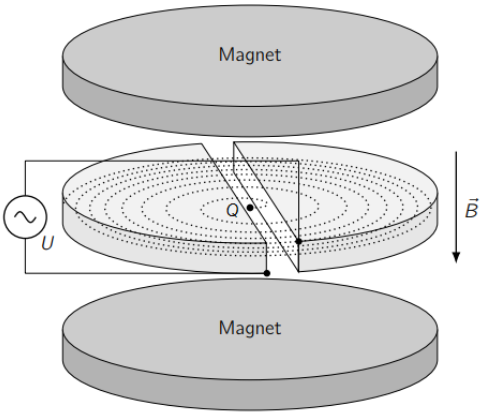
Einleitung Teilchenbeschleuniger

Beim Begriff des Teilchenbeschleunigers denken viele an das CERN: Eine gigantische Forschungseinrichtung die dem Zweck dient die kleinsten Bauteile der Materie zu untersuchen. Jedoch finden Teilchenbeschleuniger auch in anderen Gebieten vielfältige Anwendung, wie zum Beispiel in der Medizinphysik (Strahlentherapie) und in der Strukturbiologie (Elektronenmikroskopie, Röntgenstreuung und Kristallographie). In der folgenden Aufgabe werden wir einen Teilchenbeschleuniger näher betrachten.

Aufgabe 10 – Zyklotron

Erstmals realisiert wurde ein Zyklotron 1930 vom Berkeley Professor Ernest O. Lawrence, welcher dafür 1939 den Physik Nobelpreis erhielt. Bis in die 50er Jahre war diese Art der Teilchenbeschleuniger *„the most powerful atom-smasher in the world"*.

Ein Zyklotron besteht aus zwei hohlen, halbkreisförmigen Elektroden, so genannte Duanden, in einem homogenen magnetischen Feld der Flussdichte B, das senkrecht zu den Elektroden orientiert ist. Zwischen den Elektroden befindet sich ein sehr schmaler Spalt über den eine Wechselspannung der Form $U(t) = U_0 sin(\omega t)$ angelegt ist. Das zugehörige elektrische Feld wirkt nur zwischen den beiden Duanden, im Innern der Dosen dagegen verschwindet die elektrische Feldstärke.
In der Mitte des schmalen Spalts befindet sich eine Ionenquelle Q. Die Frequenz der Spannung ist so eingestellt, dass die Teilchen bei jedem Durchqueren des Spaltes beschleunigt werden. Dadurch bewegen sie sich näherungsweise auf einer Spiralbahn nach außen, bis sie nach vielen Umläufen an den Rand der Anordnung gelangen, wo sie durch ein elektrisches Ablenkfeld herausgelenkt werden (vgl. Abbildung).



Betrachten Sie im Folgenden ein Zyklotron, wie es von Lawrence Ende der 30er Jahre des letzten Jahrhunderts in Berkeley entwickelt wurde. Die Elektroden des Zyklotrons besaßen einen Radius von $R = 0,76\,\mathrm{m}$ und die über den gesamten Zyklotronquerschnitt als konstant annehmbare magnetische Flussdichte betrug $B = 0,71\,\mathrm{T}$. In dem Zyklotron wurden Protonen mit einer Ladung $e = 1,602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ und einer Masse $m = 1,673 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ beschleunigt. Die Amplitude der Hochfrequenzspannung betrug dabei $U_0 = 87\,\mathrm{kV}$.

a) Leiten Sie einen Ausdruck für die zum Beschleunigen der Protonen notwendige Kreisfrequenz ω her und geben Sie den Wert der Kreisfrequenz an. Vernachlässigen Sie bei Ihrer Betrachtung relativistische Effekte.

Lösung: Während des Umlaufens in den Elektroden bewegen sich die Protonen auf Kreisbahnen. Dazu muss eine Zentrifugalkraft wirken, die von dem Magnetfeld aufgrund der Lorentzkraft hervorgerufen wird. Für die Bewegung auf einer Kreisbahn mit Radius r muss also gelten:

$$F_{zent} = m\omega^2 r \stackrel{!}{=} evB = e\omega rB = F_L.$$

Dabei wurde die auf einer Kreisbahn geltende Beziehung $v = \omega r$ ausgenutzt. Die daraus resultierende notwendige Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{eB}{m} \approx 6,8 \times 10^7\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

ist unabhängig vom Radius der Kreisbahn. Sie wird als Zyklotronfrequenz bezeichnet.

---

b) Bestimmen Sie die kinetische Energie sowie die Geschwindigkeit der Protonen beim Verlassen des Zyklotrons und beurteilen Sie, inwieweit es zulässig ist, relativistische Effekte zu vernachlässigen.

Lösung: Beim Verlassen des Zyklotrons bewegen sich die Protonen auf einer Kreisbahn, deren Radius dem der Elektroden entspricht. Damit lässt sich die kinetische Energie beim Verlassen aus der Winkelfrequenz bestimmen zu

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m\omega^2 R^2}{2} = \frac{e^2 B^2 R^2}{2m} \approx 2,2 \times 10^{-12}\mathrm{J} \approx 14\mathrm{MeV}.$$

Die Geschwindigkeit mit der die Protonen aus dem Zyklotron austreten ergibt sich damit zu

$$v = \frac{eBR}{m} \approx 5,2 \times 10^7 \mathrm{ms}^{-1} \approx 0,17c.$$

Damit beträgt der Lorenzfaktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1,015$$

und die Vernachlässigung relativistischer Effekte erscheint noch angemessen.

---

c) Berechnen Sie die Anzahl der Umläufe, die ein Proton in dem Zyklotron mindestens macht, bevor es aus diesem austritt, und ebenfalls die Zeit, die es sich dabei in dem Zyklotron aufhält

---

Lösung: Die Anzahl der Umläufe errechnet sich aus der kinetischen Energie der Protonen beim Austritt aus dem Zyklotron. Diese erhalten die Protonen beim Durchlaufen des Spaltes zwischen den Elektroden. In jedem Umlauf werden diese zwei Mal durch die Hochfrequenzspannung beschleunigt. Bezeichne mit N die Anzahl der Umläufe des Protons im Zyklotron. Wenn die Protonen in dem Spalt jedes Mal mit der maximalen Spannung beschleunigt werden, gilt beim Austritt:

$$2NU_0 e = E_{kin} \stackrel{!}{=} \frac{e^2 B^2 R^2}{2m}$$

und damit für die mindestens notwendige Anzahl der Umläufe

$$N = \frac{eB^2 R^2}{4mU_0} \approx 80.$$

Die Zeit t, die das Proton im Zyklotron umläuft, beträgt demnach

$$t = N\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi B R^2}{2U_0} \approx 7,4 \times 10^{-6}\mathrm{s}.$$

---

d) Warum eignet sich ein Zyklotron nicht um Elektronen auf hohe Geschwindigkeiten zu beschleunigen?

Lösung: Das Elektron erreicht aufgrund seiner geringen Masse relativistische Geschwindigkeiten, womit die relativistische Massenzunahme nicht mehr zu vernachlässigen ist, sodass die Winkelgeschwindigkeit am Rand des Zyklotrons im Vergleich zur Mitte drastisch abnimmt, weshalb nicht mehr mit einer Wechselspannung konstanter Frequenz gearbeitet werden kann. Mit der relativistischen Masse $m = \gamma m_0$ wobei γ dem Lorentzfaktor und m_0 der Ruhemasse entsprechen, ergibt sich für die Kraft

$$F_{zent} = \gamma m_0 \omega_{rel}^2 r \stackrel{!}{=} e\omega_{rel} r B = F_L.$$

Somit folgt

$$\gamma^2 m_0^2 \omega_{rel}^2 = e^2 B^2$$
$$\Longrightarrow \omega_{rel} = \frac{eB}{\sqrt{\left(m_0^2 + \frac{r^2 e^2 B^2}{c^2}\right)}}.$$

Sobald der zweite Summand unter der Wurzel, $\frac{r^2 e^2 B^2}{c^2}$, in der Größenordnung vergleichbar wird mit dem ersten Summanden m_0^2, sind relativistische Effekte nicht mehr zu vernachlässigen und es tritt der zuvor genannte Effekt ein. Für ein Elektron bzw. ein Proton bei $r = 0m$ bzw. $r = 0,76m$ ergibt sich für die Kreisfrequenz folgende Tabelle:

Radius	Proton	Elektron
0 m	$0,068 \times 10^9\,\mathrm{s}^{-1}$	$125 \times 10^9\,\mathrm{s}^{-1}$
0,76 m	$0,067 \times 10^9\,\mathrm{s}^{-1}$	$0,4 \times 10^9\,\mathrm{s}^{-1}$
$\omega_{rel}/\omega_{klass}$	0,985	0,003

Während also die relativistische Abweichung beim Proton noch tolerabel ist, macht sie beim Elektron einen Unterschied von drei Größenordnungen. Damit ist der Zyklotron für Elektronen ungeeignet.
